

Soit R la récurrence $\sum_{i=0}^k a_i t_{n-i} = 0$. Son polynôme caractéristique est $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^{k-i}$. Ce polynôme a k racines r_i , $i = 1, \dots, k$, par le théorème fondamental de l'algèbre, et peut être écrit $p(x) = \prod_{i=1}^k (x - r_i)$. Supposons que r soit une racine de $p(x)$ de multiplicité m . Si on met

$$q(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ r_i \neq r}}^k (x - r_i),$$

on a que $p(x) = (x - r)^m q(x)$. Soit $p'(x) = \frac{dp(x)}{dx}$ la dérivée de $p(x)$. On a

$$p'(x) = \sum_{i=0}^k a_i (k-i) x^{k-i-1} = m(x-r)^{m-1} q(x) + (x-r)^m q'(x) = (x-r)^{m-1} [mq(x) + (x-r)q'(x)]$$

et on observe facilement que $p(r) = 0$. En fait, il est facile de voir, par induction, que la i -ème dérivée $p^{(i)}(x)$ de $p(x)$ vérifie la même propriété pour $i = 0, \dots, m-1$: $p^{(i)}(r) = 0$. Il suffit de définir

1. $p^{(0)}(x) = p(x)$, $q_0(x) = q(x)$
2. $p^{(i)}(x) = (p^{(i-1)}(x))'$, $q_i(x) = [(m-i+1)q_{i-1} + (x-r)q'_{i-1}(x)]$

Alors évidemment $p^{(i)}(r) = 0$ car

$$p^{(i)}(x) = (m-i+1)(x-r)^{m-i} q_{i-1}(x) + (x-r)^{m-i+1} q'_{i-1}(x) = (x-r)^{m-i} q_i(x)$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On peut alors définir

1. $u_0(x) = x^{n-k} p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^{n-i}$
2. $u_s(x) = x u'_{s-1}(x)$ pour $s = 1, \dots, m-1$

et prouver, par récurrence, que pour tout $s = 0, 1, \dots, m-1$, et $i = 0, \dots, s$ il existe des fonctions $f_{s,i}(x)$ telles que

$$u_s(x) = \sum_{i=0}^s f_{s,i}(x) p^{(i)}(x).$$

Ceci est évidemment vrai pour $s = 0$, avec $f_{0,0} = x^{n-k}$ et si c'est vrai pour s , alors

$$u_s(x) = x u'_{s-1}(x) = x \left[\sum_{i=0}^{s-1} f_{s-1,i}(x) p^{(i)}(x) \right]' = x \left[\sum_{i=0}^{s-1} [f'_{s-1,i}(x) p^{(i)}(x) + f_{s-1,i}(x) p^{(i+1)}(x)] \right]$$

et alors

$$u_s(x) = \sum_{i=0}^{s-1} [x f'_{s-1,i}(x) p^{(i)}(x) + x f_{s-1,i}(x) p^{(i+1)}(x)] = \sum_{i=0}^s f_{s,i}(x) p^{(i)}(x)$$

où $f_{s,i}(x) = xf'_{s-1,i}(x) + xf_{s-1,i-1}(x)$ pour $i = 0, \dots, s-1$ et $f_{s,s}(x) = xf_{s-1,s-1}(x)$.

Il en découle que $u_s(r) = 0$ car les $p^{(j)}(r) = 0$ pour $j = 0, \dots, m-1$ et on conclut que $t_n = n^s r^n$ est une solution à notre récurrence R parce que

$$u_s(x) = \sum_{i=0}^k a_i (n-i)^s x^{n-i}$$

comme on peut facilement voir par induction.

On a alors une (!) solution générale de R de la forme

$$t_n = \sum_{j=0}^{m-1} c_j n^j r^n$$

si on ne considère que la racine r . Il est maintenant facile de généraliser : si $p(x)$ a s racines *distinctes* $r_1, \dots, r_s$, r_i de multiplicité m_i , alors elles donnent chacune une solution

$$t_n^i = \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n$$

et celles-ci donnent la solution générale à R

$$t_n = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n.$$