Exemple 0.1 Soit $t_n = \frac{1}{4-t_{n-1}}$ pour $n > 0$ et $t_0 = 0$. Alors on a

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{4} \quad \text{et, pour } n > 1, \quad \text{écrivaint } t(n) = \frac{p(n)}{q(n)},$$

$$p(n) = q(n-1)$$

et

$$q(n) = 4q(n-1) - p(n-1)$$

comme on peut voir par induction. Donc $q(n) = p(n+1)$ et on obtient

$$p(n) = 4q(n-2) - p(n-2) = 4p(n-1) - p(n-2)$$

et son polynôme caractéristique $x^2 - 4x + 1$ dont les racines sont $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$. Donc

$$p(n) = c_1(2 + \sqrt{3})^n + c_2(2 - \sqrt{3})^n$$

et d'après la conditions initiale $p(0) = 0$ on trouve que $c_1 = -c_2$ et que

$$t_n = \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{p(n)}{p(n+1)} = \frac{c_1(2 + \sqrt{3})^n - c_1(2 + \sqrt{3})^n}{c_1(2 + \sqrt{3})^{n+1} - c_1(2 + \sqrt{3})^{n+1}} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 + \sqrt{3})^n}{(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 + \sqrt{3})^{n+1}}$$

car $c_1 \neq 0$ par la condition $t(1) = 1$.

Exemple 0.2 Soit a, b des réels non-zéro et soit $T(n)$ défini par

$$T(0) = a$$

$$T(1) = b$$

$$T(n) = \frac{1 + T(n-1)}{T(n-2)}$$

pour $n > 1$. Alors il est TRES facile de voir que

$$T(n) \begin{cases} a & n \equiv 0 \pmod{5} \\ b & n \equiv 1 \pmod{5} \\ \frac{1+a}{b} & n \equiv 2 \pmod{5} \\ \frac{1+a+b}{ab} & n \equiv 3 \pmod{5} \\ \frac{1+a}{b} & n \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Exemple 0.3 Soit

$$T(n) \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 2T(n-1) - 2T(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique $x^2 - 2x + 2$ a deux racines simples $1 + i$ et $1 - i$ (où $i = \sqrt{-1}$). Donc la solution générale est $T(n) = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n$ et les conditions initiales nous donnent que $c_1 = \frac{1}{2i} = -c_2$. La solution est alors

$$T(n) = \frac{1}{2i} [(1+i)^n - (1-i)^n]$$

et on peut l'exprimer de manière plus compacte en se souvenant qu'un nombre complexe $a + ib$ peut être écrit $|a + ib|(\cos \phi + i \sin \phi)$, avec $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et ϕ l'angle fait par le vecteur du nombre, soit $\arctan(\frac{b}{a})$. Dans notre cas, $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\phi = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$T(n) = \frac{1}{2i} (\sqrt{2})^n [(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))^n - (\cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{4}))^n] =$$

$$\frac{1}{2i} 2^{\frac{n}{2}} [\cos(n\frac{\pi}{4}) + i \sin(n\frac{\pi}{4}) - \cos(n\frac{\pi}{4}) + i \sin(n\frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2i} 2^{\frac{n}{2}} (2i \sin(n\frac{\pi}{4})) = 2^{\frac{n}{2}} \sin(n\frac{\pi}{4})$$

car $[\cos(\phi) \pm i \sin(\phi)]^n = \cos(n\phi) \pm i \sin(n\phi)$, par de Moivre.