

IFT3355: Infographie

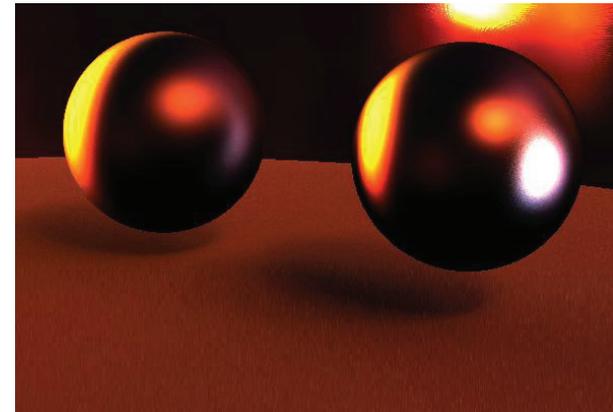
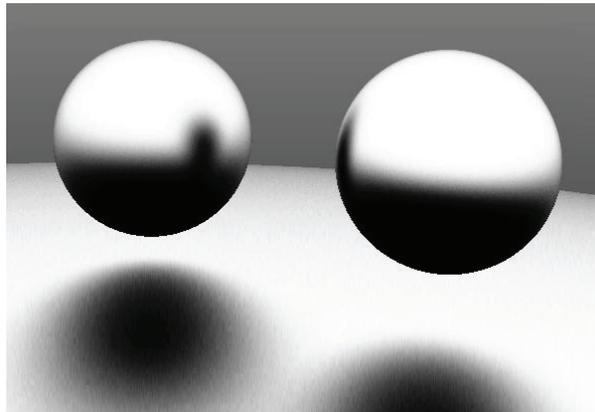
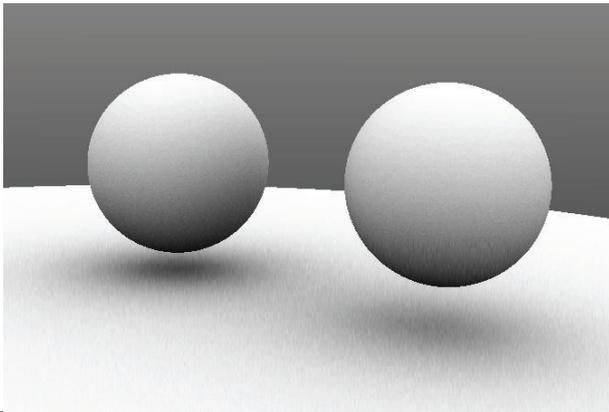
Sujet 6: shading 6 (illumination *globale* 3)

Derek Nowrouzezahrai
Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal



Rendu avec l'intégration Monte Carlo

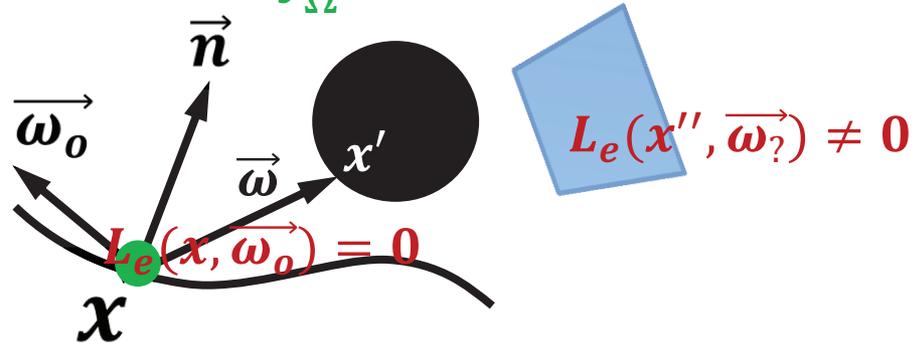
- Nous venons d'étudier:
 1. Comment plusieurs problèmes de rendu peuvent être formulés avec des intégrales de hautes dimensions
 2. Comment résoudre ces types d'intégrales avec l'intégration Monte Carlo
- Ce qui suit sont des exemples d'application d'intégration Monte Carlo à quelques problèmes d'intégration en rendu réaliste:
 - Ambient occlusion
 - Reflection occlusion
 - Shading avec les sources de lumières réalistes et complexes



Survol de divers utilisations de l'équation de rendu

- L'équation de rendu peut être utilisé pour simuler **tous** les effets d'illuminations réalistes (*sur les surfaces*)

$$L(x, \vec{\omega}_o) = L_e(x, \vec{\omega}_o) + \int_{\Omega} L(x', -\vec{\omega}) f_r(x, \vec{\omega}, \vec{\omega}_o) d\vec{\omega}$$



- Souvent nous sommes seulement intéressés en quelques effets spécifiques, au lieu de tous les effets d'illumination globale réalistes:
 - seulement les ombres doux,
 - seulement la réflexion Lambertienne,
 - seulement les lumières ponctuelles, etc...



Survol de divers utilisations de l'équation de rendu

- Nous pouvons appliquer nos suppositions pour simplifier l'équation
- Par exemple si on suppose que:
 - il y a aucun illumination globale,
 - seulement les sources de lumières ont une profile d'émission, et
 - on effectue seulement la réflexion Lambertienne

$$L(x, \vec{\omega}_o) = \cancel{L_e(x, \vec{\omega}_o)} + \int_{\Omega} L(x', -\vec{\omega}) f_r(x, \vec{\omega}, \vec{\omega}_o) d\vec{\omega}$$

devient

$$L_o(x, \vec{\omega}_o) = \int_{\Omega} L_{in}(x, \vec{\omega}) V(x, \vec{\omega}) \left(\frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}, 0)}{\pi} \right) d\vec{\omega}$$

- si on suppose de plus qu'il y a une seule lumière directionnelle avec intensité 1 à direction $\vec{\omega}_l$

$$L_o = \int_{\Omega} \delta(\vec{\omega}_l) V(x, \vec{\omega}) \left(\frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}, 0)}{\pi} \right) d\vec{\omega} = V(x, \vec{\omega}_l) \left(\frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_l, 0)}{\pi} \right)$$



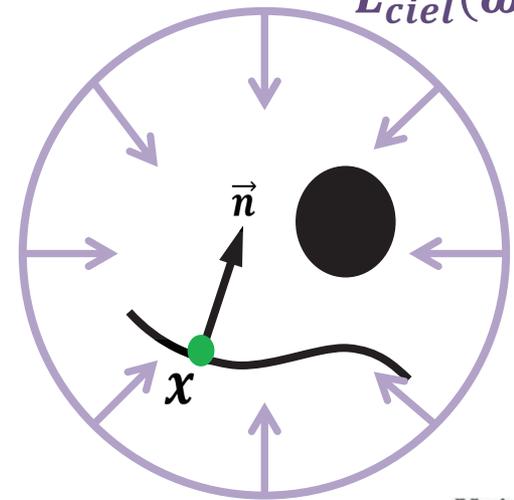
Exemple 1: Ambient Occlusion

- Considère le prochain scénario: on veut déterminer le shading d'une scène composée complètement des objets **diffus** (tous avec $S_\lambda = k_d = 1$) grâce à l'**illumination directe** du **ciel**
 - ici on traite le ciel comme une source sphérique à distance infini de tous les points x avec une profile d'émission de $L_{in}(x, \vec{\omega}) = L_{ciel}(\vec{\omega}) = 1$

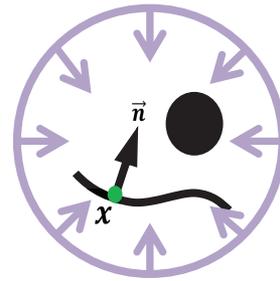
$$L_o(x, \vec{\omega}_o) = L_{ao}(x) = \int_{\Omega} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}, 0)}{\pi} V(x, \vec{\omega}) d\vec{\omega}$$

$$L_{ciel}(\vec{\omega}) = 1$$

- On va calculer cette intégrale avec un estimateur Monte Carlo (où plusieurs différents estimateurs)



Exemple 1: Ambient Occlusion



$$L_{ciel}(\vec{\omega}) = 1$$

- On écrit l'estimateur Monte Carlo (avec une *pdf* générale) pour

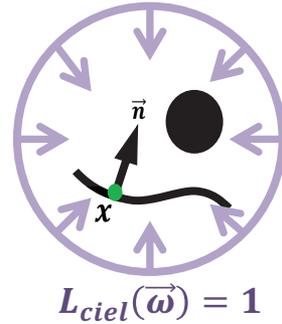
$$L_{ao}(x) = \int_{\Omega} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}, 0)}{\pi} V(x, \vec{\omega}) d\vec{\omega}$$

comme

$$\overline{L_{ao}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)}{\pi pdf(\vec{\omega}_i)}$$



Exemple 1: Ambient Occlusion



$$\overline{L}_{ao}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)}{\pi \text{pdf}(\vec{\omega}_i)}$$

- Et maintenant, comme avec tous les estimateur Monte Carlo, le problème se réduit à:
 - choisir $\text{pdf}(\vec{\omega}_i)$, et
 - distribuer les échantillons aléatoires $\vec{\omega}_i$ selon cette pdf
- On va discuter trois choix de $\text{pdf}(\vec{\omega}_i)$, comment distribuer les échantillons selon ces pdfs , et l'effet sur la convergence/variance de nos estimateurs
 - Rappelez-vous que un but pendant l'intégration Monte Carlo est de réduire la variance de nos estimateurs en utilisant des techniques comme ex: stratification, importance sampling, etc.



Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

$$\overline{L_{ao}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)}{\pi \text{pdf}(\vec{\omega}_i)}$$

- Comme l'exemple en 1D la semaine dernière on peut commencer avec le choix de *pdf* le plus simple: une distribution uniforme
 - Dans le cas 1D on avait $\text{pdf}(x_i) = \frac{1}{\text{longueur}(X)} = \frac{1}{\int_X dx} = \frac{1}{b-a}$ mais maintenant nous échantillons les **directions sur Ω**
 - cela correspond à échantillonner les points sur une sphère de rayon = 1
 - Alors pour distribuer nos échantillons uniformément sur la surface de la sphère on aura $\text{pdf}(\vec{\omega}_i) = \frac{1}{\text{aire}(\Omega)} = \frac{1}{\int_{\Omega} d\vec{\omega}} = ?$



En passant:

géométrie et intégration sur la sphère (avec rayon = 1)

- Étant donné que nos équations de rendu contiennent des fonctions paramétrisés sur Ω , nous réviserons brièvement comment représenter et effectuer des calcul analytique dans cette domaine
- Plusieurs paramétrisations *mathématiques** existent pour représenter les points sur la surface d'une sphère
 - Voici une représentation souvent utilisé:

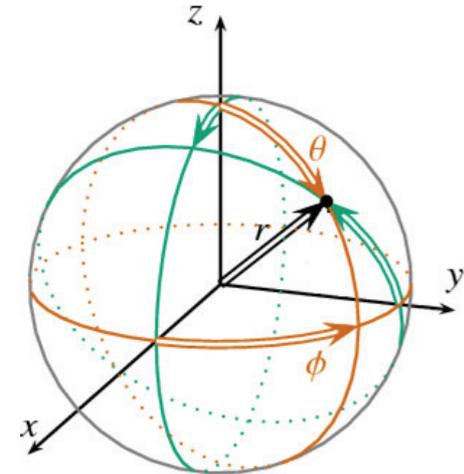
$$\Omega \rightarrow [0 \leq \theta \leq \pi] \times [0 \leq \phi \leq 2\pi]$$

$$\vec{\omega} \leftrightarrow (\theta, \phi) \leftrightarrow (x, y, z) \text{ où } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(x, y, z) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$(\theta, \phi) = \left(\arccos(z), \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)$$

$$d\vec{\omega} = \sin \theta d\theta d\phi$$



Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

$$\overline{L_{ao}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)}{\pi \text{pdf}(\vec{\omega}_i)}$$

- Alors avec une *pdf* uniforme sur la sphère on avait:

$$\text{pdf}(\vec{\omega}_i) = \frac{1}{\text{aire}(\Omega)} = \frac{1}{\int_{\Omega} d\vec{\omega}} = \frac{1}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{1}{4\pi}$$

- Notre estimateur pour L_{ao} , avec une *pdf* uniforme, devient:

$$\overline{L_{ao}}(x) = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)$$

et on a seulement à déterminer comment générer ces échantillons...



Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

$$\overline{L_{ao}}(x) = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)$$

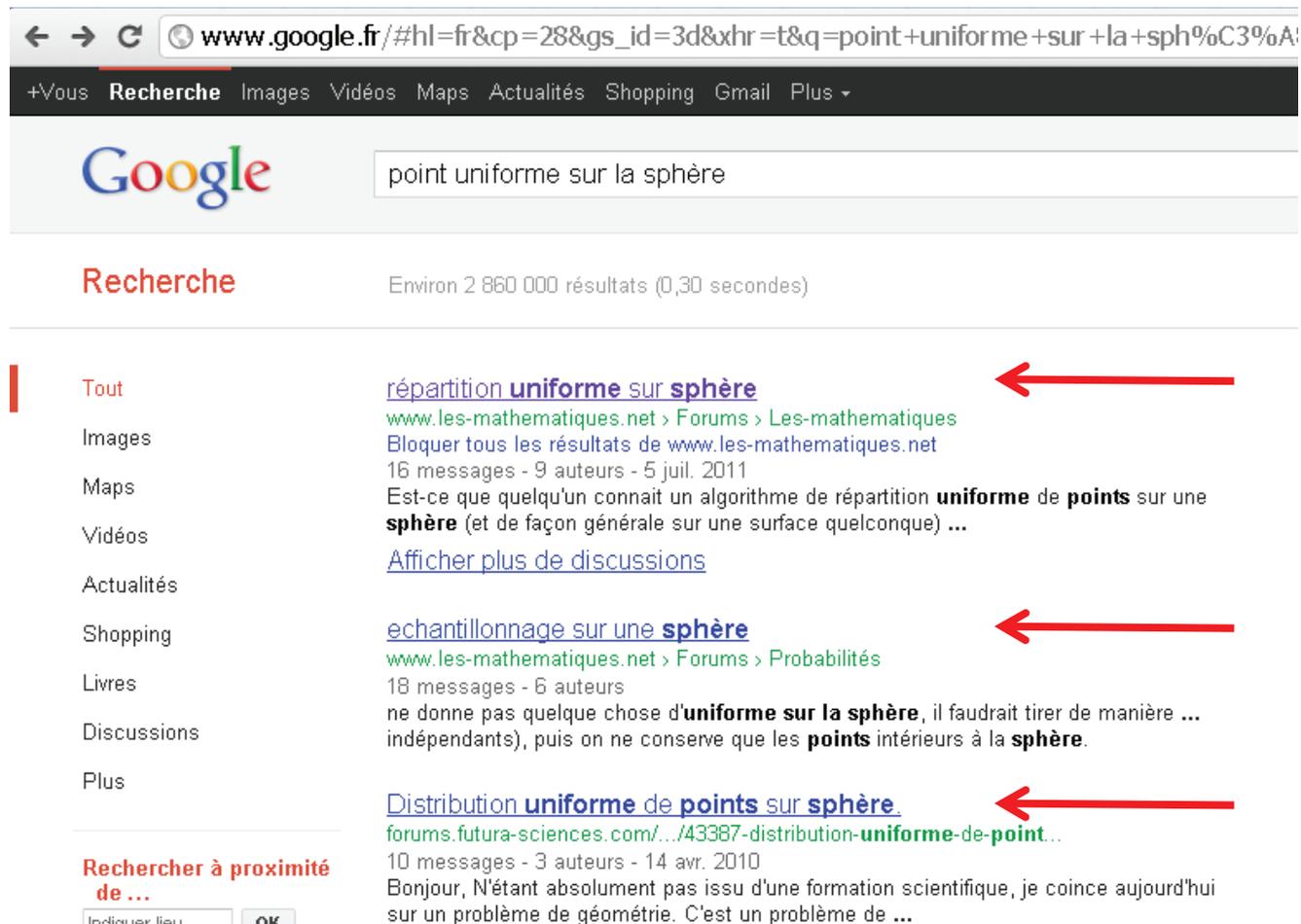
- Comment générer les $\vec{\omega}_i$ avec une distribution uniforme sur la sphère?
- Méthode 1: je vous explique beaucoup de maths supplémentaires.
- Ou...



Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

Méthode 2: on demande Google



The screenshot shows a Google search page with the following elements:

- Address bar: `www.google.fr/#hl=fr&cp=28&gs_id=3d&xhr=t&q=point+uniforme+sur+la+sph%C3%A9re`
- Navigation: +Vous Recherche Images Vidéos Maps Actualités Shopping Gmail Plus
- Search bar: Google logo and search input containing "point uniforme sur la sphère"
- Results summary: Recherche Environ 2 860 000 résultats (0,30 secondes)
- Search filters: Tout, Images, Maps, Vidéos, Actualités, Shopping, Livres, Discussions, Plus
- Search results:
 - Result 1: [répartition uniforme sur sphère](#) (www.les-mathematiques.net > Forums > Les-mathematiques Bloquer tous les résultats de www.les-mathematiques.net 16 messages - 9 auteurs - 5 juil. 2011) Est-ce que quelqu'un connait un algorithme de répartition **uniforme** de **points** sur une **sphère** (et de façon générale sur une surface quelconque) ... [Afficher plus de discussions](#)
 - Result 2: [echantillonnage sur une sphère](#) (www.les-mathematiques.net > Forums > Probabilités 18 messages - 6 auteurs) ne donne pas quelque chose d'**uniforme sur la sphère**, il faudrait tirer de manière ... indépendants), puis on ne conserve que les **points** intérieurs à la **sphère**.
 - Result 3: [Distribution uniforme de points sur sphère](#) (forums.futura-sciences.com/.../43387-distribution-uniforme-de-point... 10 messages - 3 auteurs - 14 avr. 2010) Bonjour, N'étant absolument pas issu d'une formation scientifique, je coince aujourd'hui sur un problème de géométrie. C'est un problème de ...
- Footer: Rechercher à proximité de ... (Indiquer lieu) OK



Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

$$\overline{L}_{ao}(x) = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)$$

- Et on voit que:
 - au lieu de générer deux points aléatoires uniformément entre $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$ selon:

$$\theta_{uniforme} = M_PI * rand();$$

$$\phi_{uniforme} = 2 * M_PI * rand();$$

- on doit effectivement utiliser cette formulation:

$$\theta_{uniforme} = \text{acos}(1 - 2 * rand());$$

$$\phi_{uniforme} = 2 * M_PI * rand();$$



Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

- Donc, en résumé, on a défini notre première estimateur Monte Carlo pour l'ambient occlusion en:

1. Choissant une *pdf* uniforme sur la surface de la sphère:

$$pdf(\vec{\omega}_i) = \frac{1}{4\pi}$$

2. Générant des échantillons $\vec{\omega}_i = (\theta_i, \phi_i)$ selon cette distribution:

$$\theta_i = \text{acos}(1 - 2 * \text{rand}());$$

$$\phi_i = 2 * \text{M_PI} * \text{rand}();$$

3. Calculant notre valeur d'ambient occlusion:

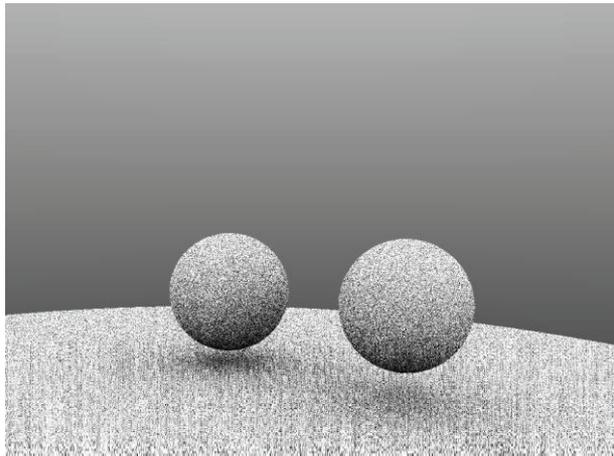
$$\overline{L}_{ao}(x) = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)$$



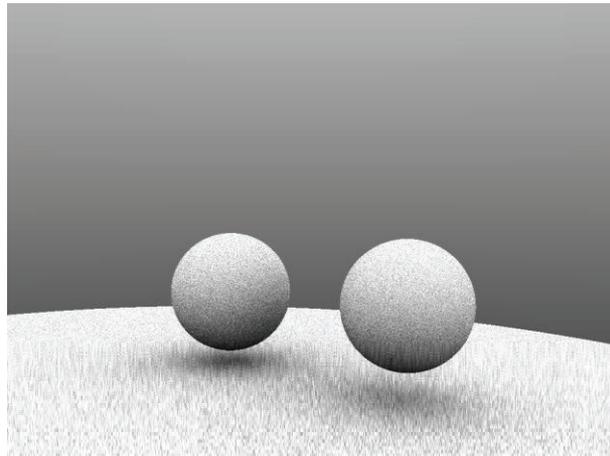
Ambient Occlusion – Estimateur 1

(pdf = direction sphérique uniforme)

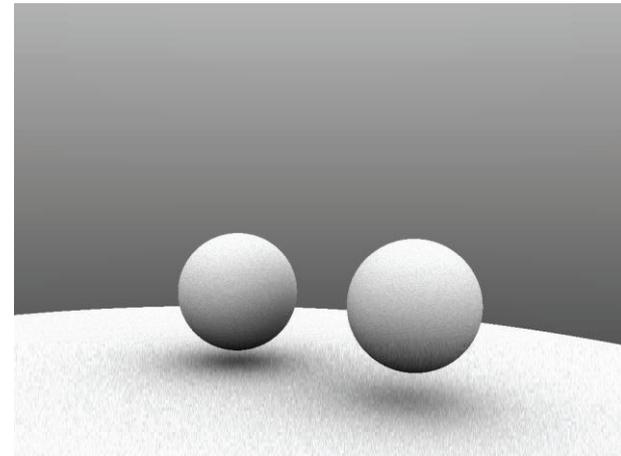
- Résultats (utilisant le `rand()` de `stdlib.h`):



$N = 10$



$N = 100$



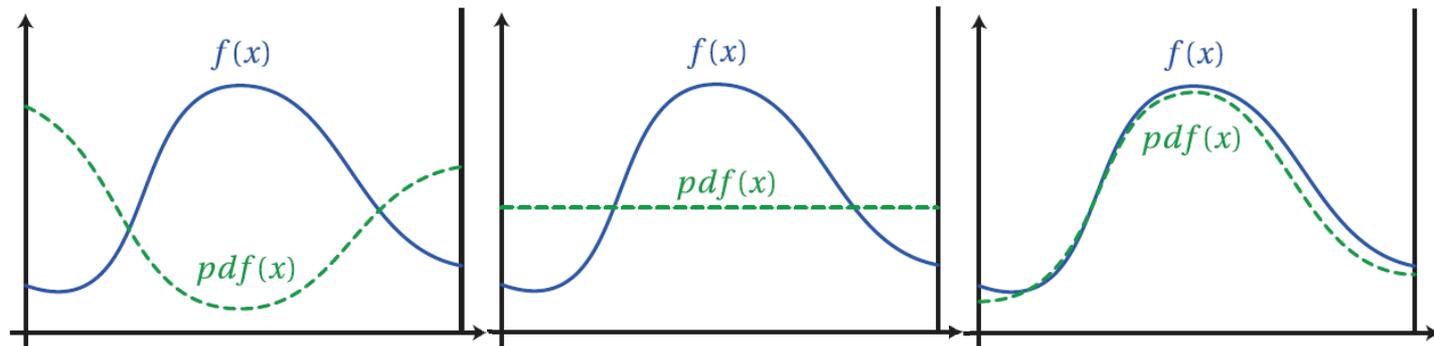
$N = 1000$



Ambient Occlusion: y-a-t'il des estimateurs plus efficaces?

- Rappelez-vous qu'un des buts d'intégration Monte Carlo est de réduire la variance de l'estimateur
 - Un moyen de réduire la variance est d'utiliser une *pdf* qui distribue nos échantillons selon la forme de notre intégrande

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$



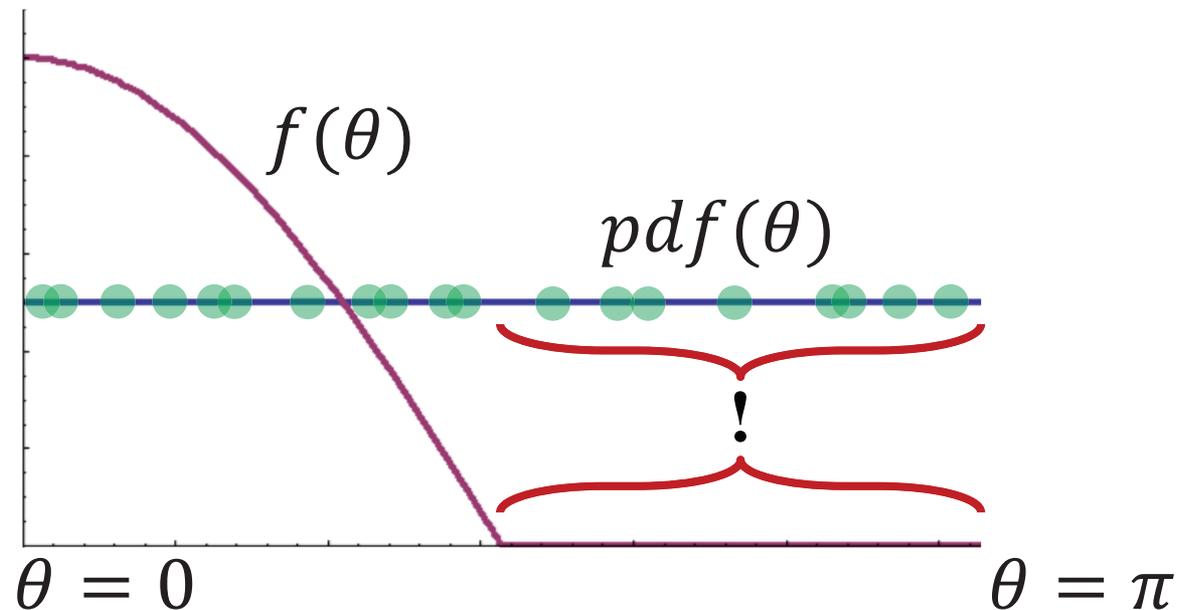
- Présentement, notre intégrande est $f(\omega) = \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}, 0) V(x, \vec{\omega})}{\pi}$ mais notre *pdf* est $\frac{1}{4\pi}$



Ambient Occlusion: réduire la variance

- Si nous fixons $\vec{n}_x = \vec{z} = (0,0,1)$ et nous *ignorons la visibilité* nous pouvons étudier l'intégrande et la *pdf* en manière visuelle:

- $f(\omega)|_{\vec{n}_x=\vec{z}} = \frac{\max((0,0,1) \cdot (\cos \phi \sin \theta, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), 0)}{\pi} = \frac{\max(\cos \theta, 0)}{\pi} = f(\theta)$



- Clairement cette *pdf* n'est pas optimale

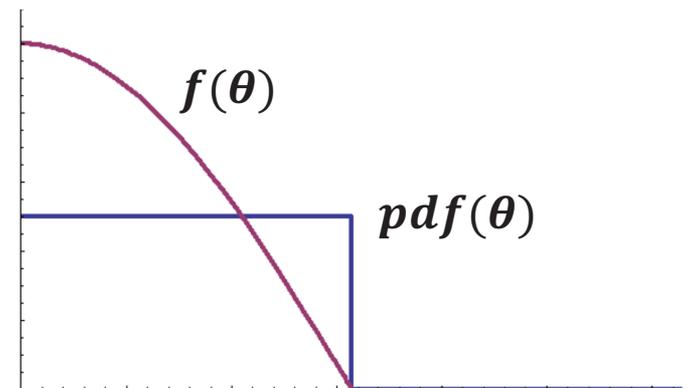


Ambient Occlusion – Estimateur 2

(pdf = direction **hémisphérique** uniforme)

- Nous pouvons améliorer notre estimateur en éliminant la distribution des échantillons où $f(\vec{\omega})$ est 0
 - ces régions contribue rien à notre intégrale finale!
 - la nouvelle distribution est uniforme sur l'hémisphère autour de la normale \vec{n}_x avec une $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{\int_{H_{n_x}} d\vec{\omega}} = \frac{1}{2\pi}$
 - On génère nos échantillons $\vec{\omega}_i = (\theta_i, \phi_i)$ selon cette pdf avec:

```
 $\theta_i = \text{acos}(\text{sqrt}(\text{rand}()));$   
 $\phi_i = 2 * \text{M\_PI} * \text{rand}();$   
if( dot( $\vec{n}_x$ ,  $\omega_i$ ) > 0) accepter;  
else rejeter;
```



- Notre nouveau estimateur est:

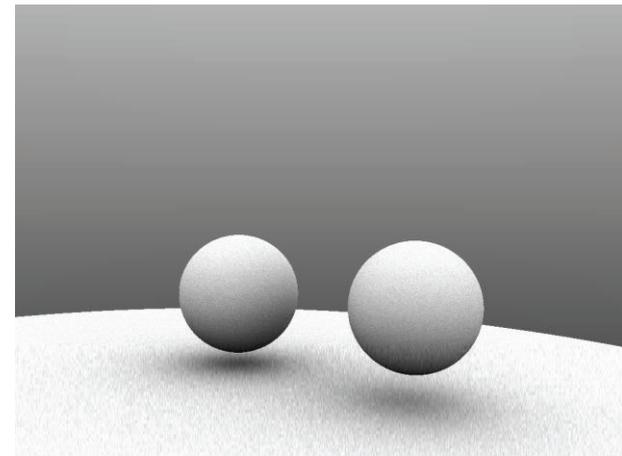
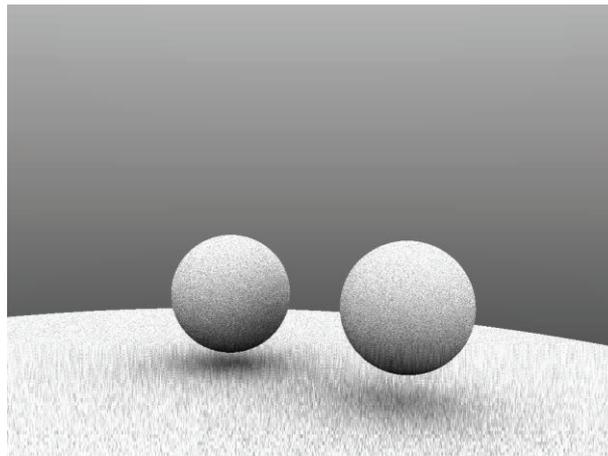
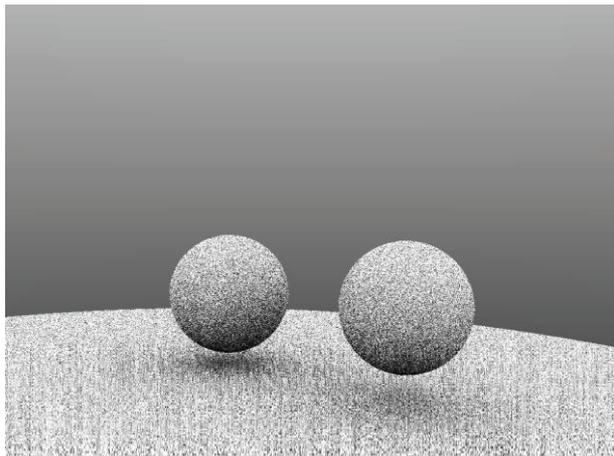
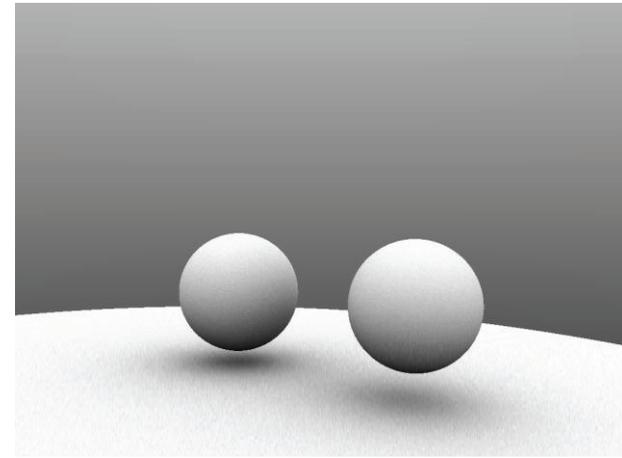
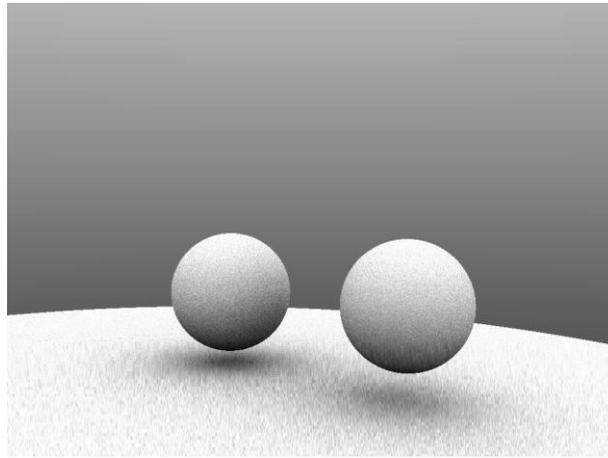
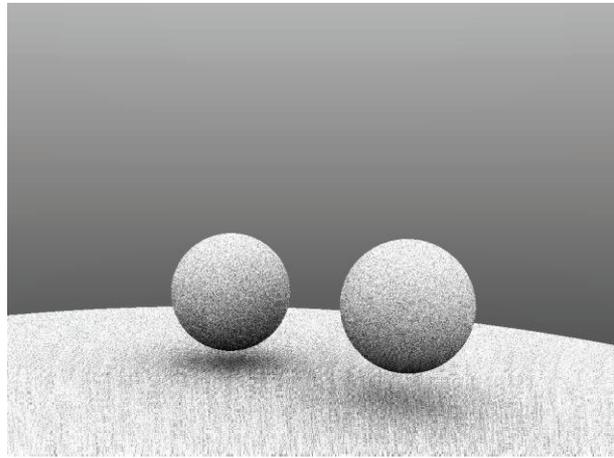
$$\overline{L_{ao}}(x) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, \theta) V(x, \vec{\omega}_i)$$



Ambient Occlusion – Estimateur 2

(pdf = direction hémisphérique uniforme)

- Résultats avec la nouvelle *pdf* et le nouveau estimateur:



$N = 10$

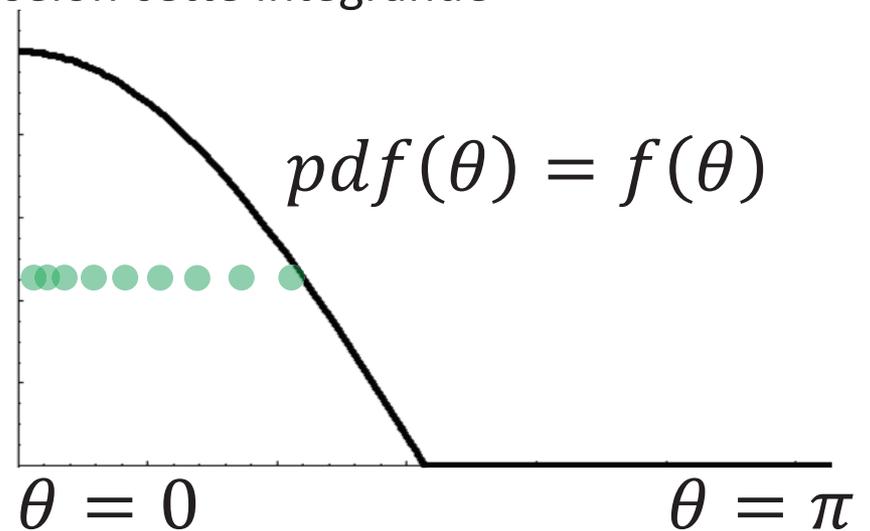
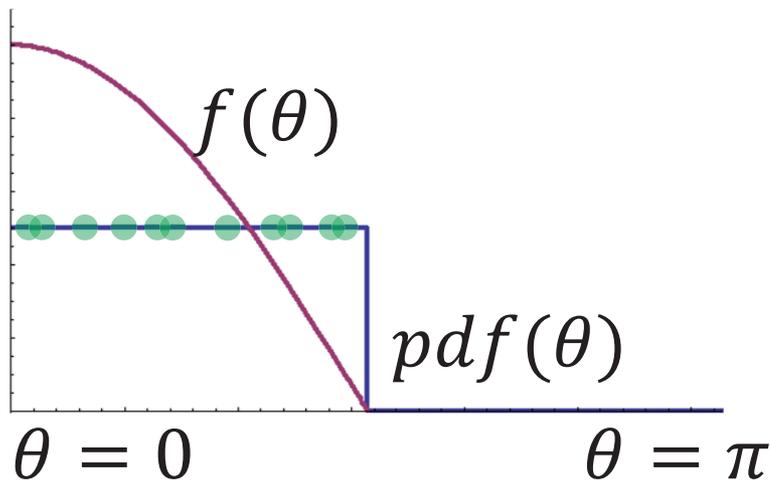
$N = 100$

$N = 1000$



Ambient Occlusion: réduire la variance encore plus

- Même les petites modifications qu'on vient d'appliquer dans le deuxième estimateur ont améliorés nos résultats
- On peut encore améliorer (réduire) la variance de notre estimateur:
 - Si on continue d'ignorer la visibilité nous savons exactement la forme de notre intégrande, $f(\omega) = \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}, 0)}{\pi}$, et nous pouvons adapter notre *pdf* pour distribuer les échantillons exactement selon cette intégrande

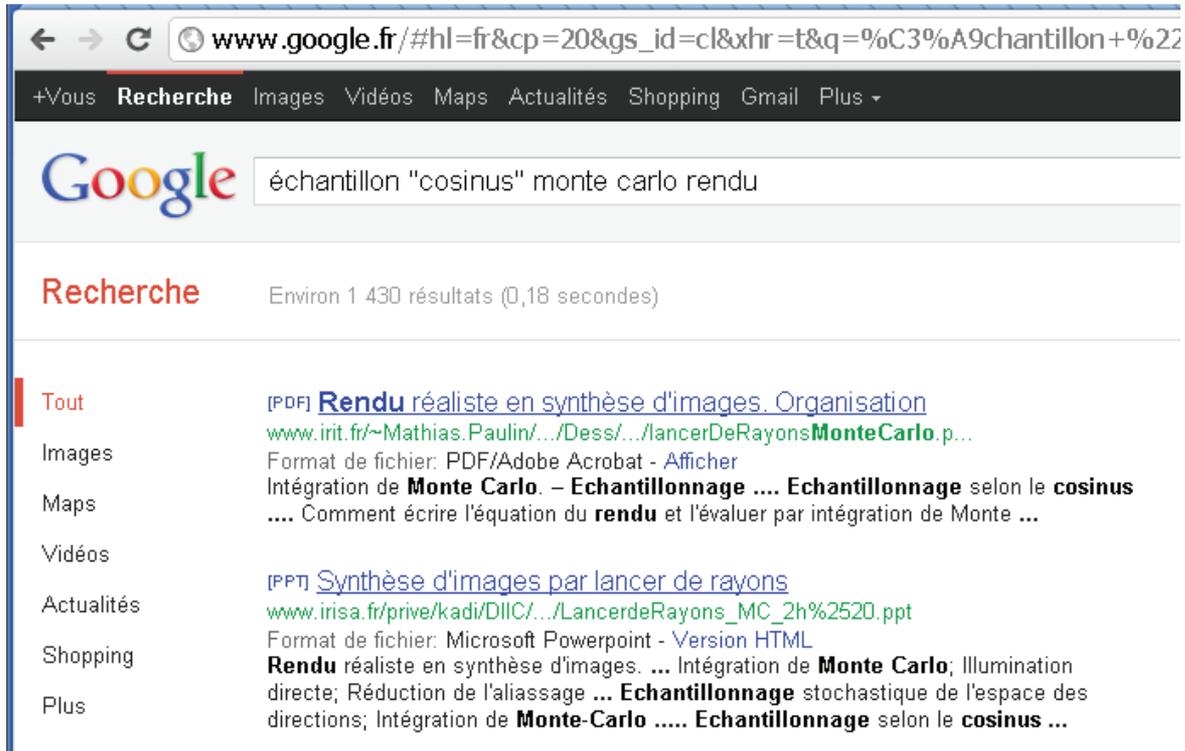


Ambient Occlusion – Estimateur 3

(pdf = distribution hémisphérique + cosinus autour de la normale)

- Donc, on peut suivre les 3 étapes standards:

1. Choisi pdf : $pdf(\vec{\omega}_i) = \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0)}{\pi}$
2. Génère les échantillons $\vec{\omega}_i = (\theta_i, \phi_i)$ selon cette distribution:



The screenshot shows a Google search results page. The search query is "échantillon \"cosinus\" monte carlo rendu". The results are filtered by "Tout" (All). The first result is a PDF document titled "Rendu réaliste en synthèse d'images. Organisation" from the URL www.irit.fr/~Mathias.Paulin/.../Dess/.../lancerDeRayonsMonteCarlo.p.... The second result is a Microsoft PowerPoint presentation titled "Synthèse d'images par lancer de rayons" from the URL www.irisa.fr/privé/kadi/DIIC/.../LancerdeRayons_MC_2h%2520.ppt. The search results also show the number of results (Environ 1 430 résultats) and the search time (0,18 secondes).



Ambient Occlusion – Estimateur 3

(pdf = distribution hémisphérique + cosinus autour de la normale)

- Donc, on peut suivre les 3 étapes standards:

1. Choisi pdf : $pdf(\vec{\omega}_i) = \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0)}{\pi}$

2. Génère les échantillons $\vec{\omega}_i = (\theta_i, \phi_i)$ selon cette distribution:

$$\theta_i = \text{acos}(\text{sqrt}(\text{rand}()));$$

$$\phi_i = 2 * \text{M_PI} * \text{rand}();$$

effectue une rotation du point autour de \vec{n}_x ;

3. Calcul de notre valeur d'ambient occlusion:

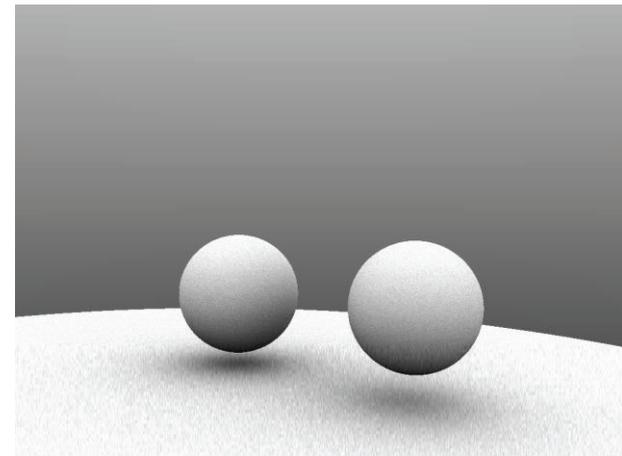
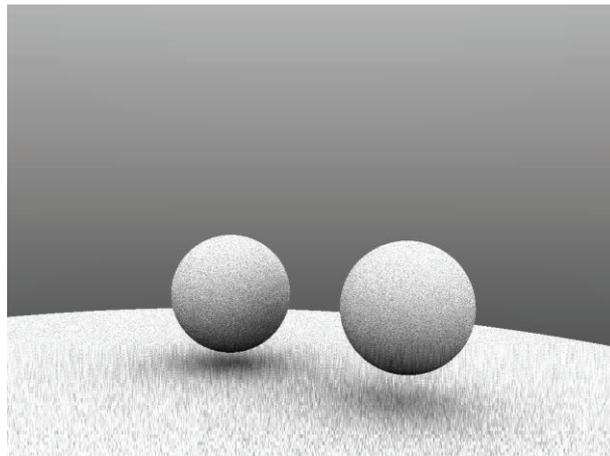
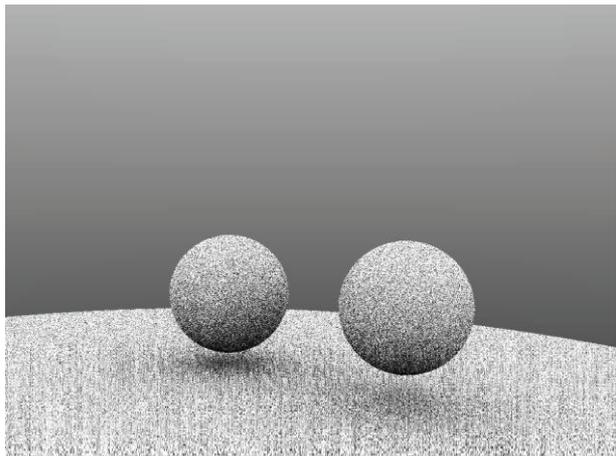
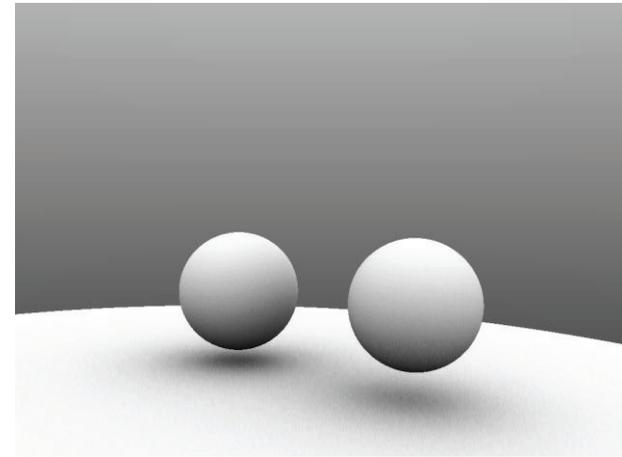
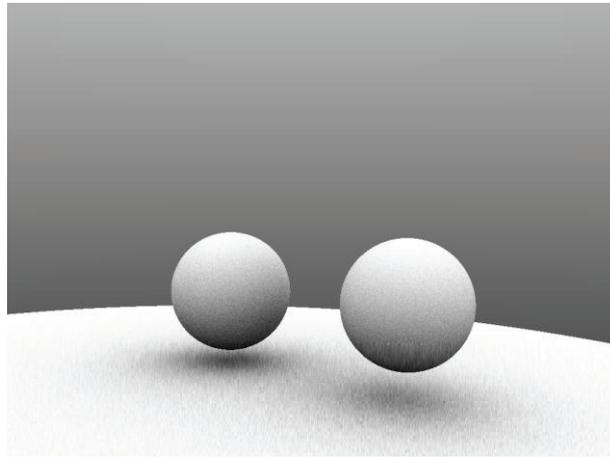
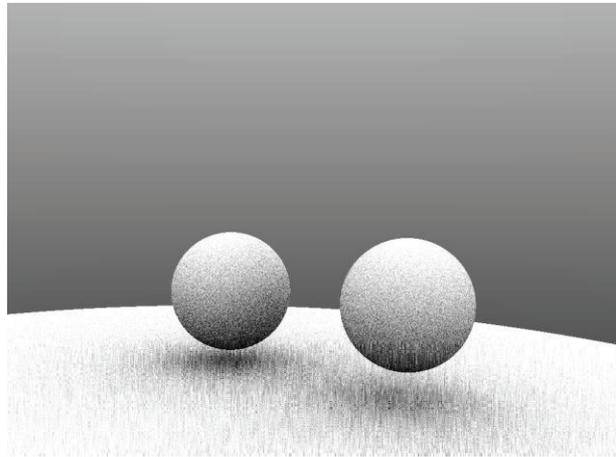
$$\overline{L}_{ao}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0) V(x, \vec{\omega}_i)}{\pi \left(\frac{\max(\vec{n}_x \cdot \vec{\omega}_i, 0)}{\pi} \right)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} V(x, \vec{\omega}_i)$$



Ambient Occlusion – Estimateur 2

(pdf = distribution hémisphérique + cosinus autour de la normale)

- Résultats avec la nouvelle *pdf* et le nouveau estimateur:



$N = 10$

$N = 100$

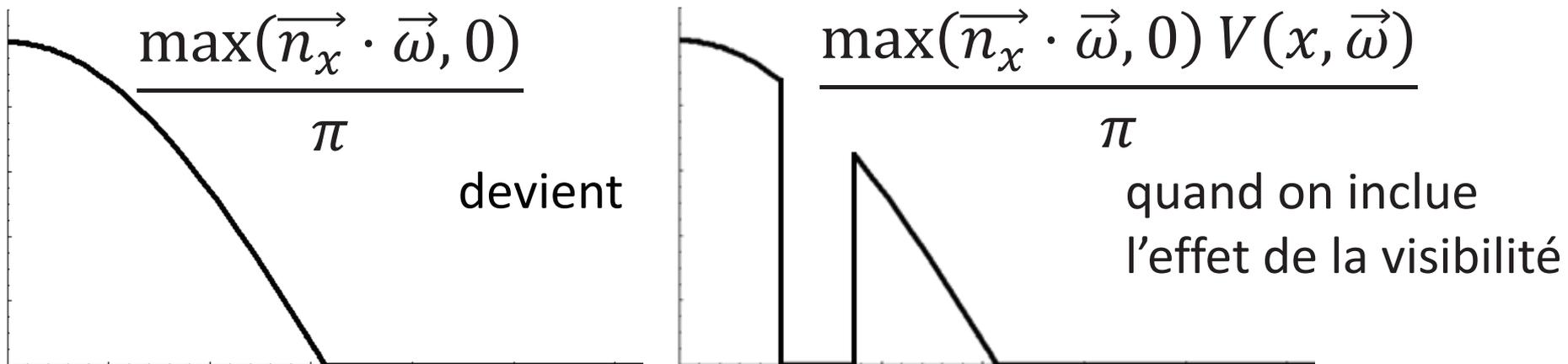
$N = 1000$



Ambient Occlusion:

qu'est-ce qui cause la variance (bruit) résiduelle?

- Si on distribue nos échantillons parfaitement selon le cosinus clampé, pourquoi y-a-t'il encore de bruit dans nos images?
- C'est à cause de la visibilité! N'oublie-pas que nous avons ignoré le terme de visibilité dans notre intégrande. En réalité:



- Si on pourrait déterminer une fonction d'importance sampling *parfaite*, combien d'échantillons est-ce qu'on aura besoin pour résoudre notre intégrale?

