



IFT1575 Modèles de recherche opérationnelle (RO)

---

## 5. Modèles stochastiques



# Espace échantillon

---

- Expérience aléatoire = expérience dont le résultat n'est pas connu avec certitude
- Supposons que tous les résultats possibles de cette expérience sont connus
- Espace échantillon  $\Omega$  = ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire
- Exemples :
  - Tirage d'une pièce de monnaie :  $\Omega = \{P, F\}$
  - Lancement d'un dé :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Temps écoulé avant l'arrivée d'un premier client dans un magasin ouvert 8 heures :  $\Omega = [0, 8]$



# Probabilité

---

- Événement  $E$  = sous-ensemble de l'espace échantillon
- Supposons que nous répétions l'expérience aléatoire un grand nombre de fois ( $n$ )
- Supposons que l'événement  $E$  se produise  $m$  fois
- Probabilité associée à l'événement  $E$  :  $P(E) \approx m/n$
- Définition empirique :  $P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m/n$
- Définition formelle :
  - $0 \leq P(E) \leq 1$
  - $P(\Phi) = 0$  et  $P(\Omega) = 1$
  - $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ , si  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints
- Tirage d'une pièce de monnaie :  $P(\{P\}) = P(\{F\}) = 1/2$



# Probabilité conditionnelle

---

- Lorsqu'un événement  $E_1$  se produit, cela peut influencer la probabilité d'un autre événement  $E_2$
- Exemple : la probabilité qu'il pleuve demain ( $E_2$ ) est plus élevée s'il pleut aujourd'hui ( $E_1$ ) que s'il ne pleut pas
- Si  $P(E_1) > 0$ , on définit ainsi la probabilité conditionnelle associée à l'événement  $E_2$ , étant donné  $E_1$  :  
$$P(E_2|E_1) = P(E_1 \cap E_2) / P(E_1)$$
- Propriétés :
  - $0 \leq P(E_2|E_1) \leq 1$
  - $P(\Phi|E_1) = 0$  et  $P(\Omega|E_1) = 1$
  - $P(E_2 \cup E_3|E_1) = P(E_2|E_1) + P(E_3|E_1)$ , si  $E_2$  et  $E_3$  sont disjoints



# Événements indépendants

---

- Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont indépendants si :  
 $P(E_2|E_1)=P(E_2)$
- Définitions alternatives :  
 $P(E_1|E_2)=P(E_1)$   
 $P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)P(E_2)$
- En général, on postule l'indépendance de deux événements pour se servir des définitions ci-dessus, plutôt que de déduire l'indépendance de deux événements à partir des définitions
- $K$  événements  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sont indépendants si :  
 $P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k)=P(E_1)P(E_2)\dots P(E_k)$



# Variable aléatoire

---

- Variable aléatoire  $X$  : associe une valeur numérique  $X(s)$  à chaque élément  $s$  de l'espace échantillon
- Deux types de variable aléatoire :
  - Continue : valeurs réelles
  - Discrète : valeurs entières ou nombre fini de valeurs
- Exemple :
  - Expérience aléatoire : lancement de deux dés
  - Espace échantillon :  $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$
  - Variable aléatoire  $X$  : somme des résultats des deux dés
  - $P(X=2) = P(s \in \Omega : X(s)=2) = P((1,1)) = 1/36$
  - $P(X \leq 4) = P(s \in \Omega : X(s) \leq 4) = P((1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)) = 6/36 = 1/6$



# Fonction de répartition

---

- Fonction de répartition associée à une variable aléatoire  $X$  :  $F_X(b) = P(X \leq b) = P(s \in \Omega : X(s) \leq b)$
- Propriétés :
  - $F_X(b)$  est non décroissante
  - $\lim_{b \rightarrow -\infty} F_X(b) = 0$  et  $\lim_{b \rightarrow \infty} F_X(b) = 1$
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ , car  
 $\{s \in \Omega : X(s) \leq b\} = \{s \in \Omega : X(s) \leq a\} \cup \{s \in \Omega : a < X(s) \leq b\}$
- Exemple :  $X =$  somme des résultats des deux dés
  - $F_X(1) = P(X \leq 1) = 0$
  - $F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X=2) = 1/36$
  - $F_X(4) = P(X \leq 4) = 6/36 = 1/6$
  - $F_X(12) = P(X \leq 12) = 1$



## Fonction de masse (cas discret)

- Fonction de masse associée à une variable aléatoire  $X$  :  $P_X(k) = P(X=k) = P(s \in \Omega : X(s)=k)$

- Pour une variable aléatoire *discrète* :

$$F_X(b) = P(X \leq b) = \sum_{k \leq b} P(X = k) = \sum_{k \leq b} P_X(k)$$

- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P_X(b)$

- Exemple :  $X =$  somme des résultats des deux dés

- $F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X=2) = P_X(2) = 1/36$

- $F_X(4) = P(X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) = 6/36 = 1/6$



## Fonction de densité (cas continu)

---

- Une variable aléatoire  $X$  est *continue* si sa fonction de répartition peut être représentée ainsi :

$$F_x(b) = \int_{-\infty}^b f_x(x) dx$$

- La fonction sous l'intégrale est appelée fonction de densité et satisfait les conditions suivantes :

$$f_x(x) \geq 0, \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$



# Variable aléatoire continue

---

- Si la fonction de densité est continue, alors elle est égale à la dérivée de la fonction de répartition :

$$f_x(x) = F'_x(x)$$

- La fonction de masse prend toujours la valeur 0 :

$$P_x(x) = 0, \forall x$$

- Pour tout intervalle de la forme  $\langle a, b \rangle$  :

$$P(X \in \langle a, b \rangle) = \int_a^b f_x(x) dx = F_x(b) - F_x(a)$$



# Espérance mathématique (moyenne)

- Espérance mathématique associée à une variable aléatoire  $X$  :  $E(X)$

- Si  $X$  est discrète :

$$E(X) = \sum_k kP_X(k) = \sum_k kP(X = k)$$

- Si  $X$  est continue :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

- Exemple :  $X$  = somme des résultats des deux dés

$$E(X) = \sum_k kP(X = k) = \sum_{k=2}^{12} kP(X = k)$$

$$= 2.1/36 + 3.2/36 + \dots + 7.6/36 + 8.5/36 + \dots + 12.1/36 = 7$$



# Variance

---

- Espérance d'une fonction  $g(X)$

- D'une variable aléatoire discrète  $X$  :

$$E(g(X)) = \sum_k g(k)P_X(k)$$

- D'une variable aléatoire continue  $X$  :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- Variance associée à une variable aléatoire  $X$  :  $\sigma^2(X)$

$$\sigma^2(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Exemple :  $X$  = somme des résultats des deux dés

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_k k^2 P(X = k) - E(X)^2$$

$$= (4.1/36 + 9.2/36 + \dots + 49.6/36 + \dots + 144.1/36) - 49 = 5.833$$



# Loi de probabilité

---

- Loi de probabilité : modèle d'une expérience aléatoire
- Une loi de probabilité est représentée par une fonction de répartition d'une variable aléatoire
- Si cette dernière est discrète, la loi de probabilité est dite *discrète*
- Une loi de probabilité discrète peut être représentée par sa fonction de masse
- Si la variable aléatoire est continue, la loi de probabilité est dite *continue*
- Une loi de probabilité continue peut être représentée par sa fonction de densité



# Loi de Bernouilli

---

- Espace échantillon :  $\Omega = \{S, E\}$
- Variable aléatoire  $X$  :  $X(S) = 1$  et  $X(E) = 0$
- Fonction de masse :  $P_X(1) = p$  et  $P_X(0) = 1 - p$  ( $p$  est un paramètre)
- Ou encore :  $P_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$
- $E(X) = p$  et  $\sigma^2(X) = p(1-p)$
- Exemple : le tirage d'une pièce de monnaie suit une loi de Bernouilli avec  $p = 1/2$



# Loi uniforme

---

- Une variable aléatoire continue  $X$  (qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[a,b]$ ) suit une loi uniforme (notée  $U[a,b]$ ) si sa fonction de densité est :

$$f_x(x) = 1/(b-a), \forall x \in [a,b]$$

- Modélise l'expérience aléatoire consistant à choisir *au hasard* un point de  $[a,b]$  (la probabilité de choisir un point dans un sous-intervalle est proportionnelle à la longueur de ce sous-intervalle)
- $X: U[a,b] \rightarrow F_x(X): U[0,1]$



# Modèles stochastiques

---

- Système stochastique : évoluant de manière probabiliste dans le temps
- Exemples :
  - La température quotidienne
  - Un centre d'appels téléphoniques
- Modèle stochastique : représentation mathématique d'un système stochastique
- Nous verrons brièvement deux cas classiques de modèles stochastiques :
  - Les processus stochastiques
  - Les files d'attente



# Processus stochastiques

---

- Processus stochastique : suite de variables aléatoires évoluant dans le temps
- Notation :  $\{X_t\}, t \in T$
- En général,  $T$  est un ensemble discret :  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$
- De plus, chaque variable aléatoire peut prendre une valeur parmi  $M+1$  états :  $X_t \in \{0, 1, \dots, M\}$
- Exemple : précipitations quotidiennes à Montréal

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{s'il n'y a pas de précipitations le jour } t \\ 1 & \text{s'il y a des précipitations le jour } t \end{cases}$$



# Chaînes de Markov

---

- Un processus stochastique est une chaîne de Markov s'il possède la *propriété markovienne* :

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

- Cette propriété signifie que la probabilité d'un événement futur, étant donné des événements passés et un état au temps présent, ne dépend pas du passé, mais uniquement de l'état actuel
- *Probabilité de transition* entre les états  $i$  et  $j$  :

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

- La probabilité de transition est stationnaire si :

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \quad t = 1, 2, \dots$$



# Probabilités de transition

---

- Propriétés :

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1, \quad i \in \{0, 1, \dots, M\}$$

- À partir des probabilités de transition, on forme :
  - La matrice des transitions, ayant  $M+1$  rangées (les états présents) et  $M+1$  colonnes (les états futurs), chaque entrée de la matrice correspondant à  $p_{ij}$
  - Le graphe (ou diagramme) des transitions, ayant  $M+1$  sommets et tel qu'il y a un arc entre les états  $i$  et  $j$  si  $p_{ij} > 0$



# Exemple 1 : précipitations

---

- Probabilité qu'il n'y ait pas de précipitations à Montréal demain, étant donné :
  - Qu'il n'y en a pas aujourd'hui : 0,8
  - Qu'il y en a aujourd'hui : 0,6
- Ces probabilités ne changent pas, même si on tient compte de ce qui se passe avant aujourd'hui
- La propriété markovienne est satisfaite :

$$P(X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0) = P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0)$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1) = P(X_{t+1} = 0 | X_t = 1)$$



## Exemple 1 : précipitations (suite)

---

- On a donc une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont :

$$p_{00} = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = 0,8$$

$$p_{10} = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1) = 0,6$$

- Grâce aux propriétés des probabilités de transition, on déduit celles qui manquent :

$$p_{01} = P(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0) = 1 - 0,8 = 0,2$$

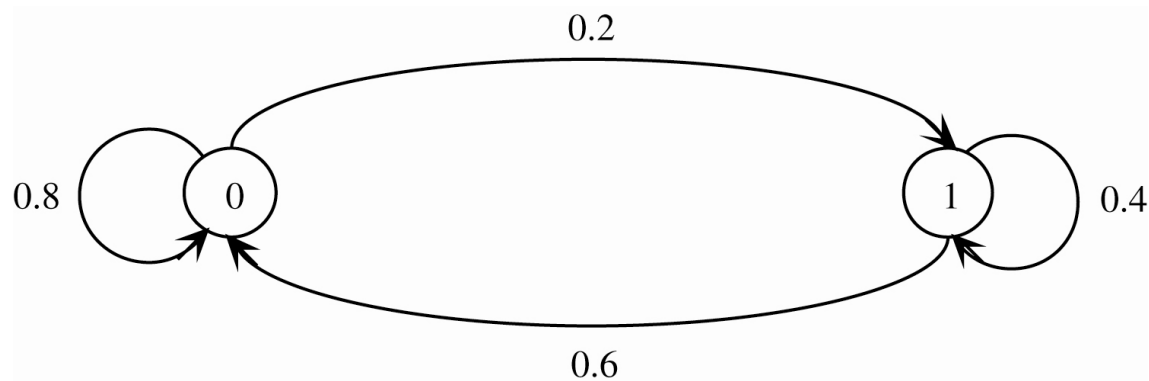
$$p_{11} = P(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1) = 1 - 0,6 = 0,4$$

# Exemple 1 : précipitations (suite)

- Matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

- Graphe de transition :





## Exemple 2 : marché boursier

- À la fin de chaque jour, on enregistre le prix de l'action de MicroSoft au marché de WallStreet :

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le prix de l'action a augmenté à la fin du jour } t \\ 1 & \text{si le prix de l'action n'a pas augmenté à la fin du jour } t \end{cases}$$

- Probabilité que le prix augmente demain étant donné:
  - Qu'il a augmenté aujourd'hui : 0,7
  - Qu'il n'a pas augmenté aujourd'hui : 0,5
- Chaîne de Markov avec matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$



## Exemple 2 : marché boursier (suite)

---

- Supposons maintenant que la probabilité que le prix de l'action augmente demain dépend non seulement de ce qui est arrivé aujourd'hui, mais également de ce qui est arrivé hier
- Le processus stochastique défini précédemment n'est alors plus une chaîne de Markov
- On peut s'en sortir en introduisant un état pour chaque combinaison d'états possibles sur *deux jours consécutifs*



## Exemple 2 : marché boursier (suite)

- On définit alors le processus stochastique suivant, où l'indice  $t$  représente deux jours consécutifs :

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier et aujourd' hui} \\ 1 & \text{si le prix de l'action a augmenté aujourd' hui, mais pas hier} \\ 2 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier, mais pas aujourd' hui} \\ 3 & \text{si le prix de l'action n'a pas augmenté, ni hier, ni aujourd' hui} \end{cases}$$

- On remarque qu'il est impossible de passer de l'état 0 au temps  $t$  à l'état 1 au temps  $t+1$ , car

$$X_t = 0, \text{ si le prix augmente hier et aujourd' hui}$$

$$X_{t+1} = 1, \text{ si le prix augmente demain, mais pas aujourd' hui}$$

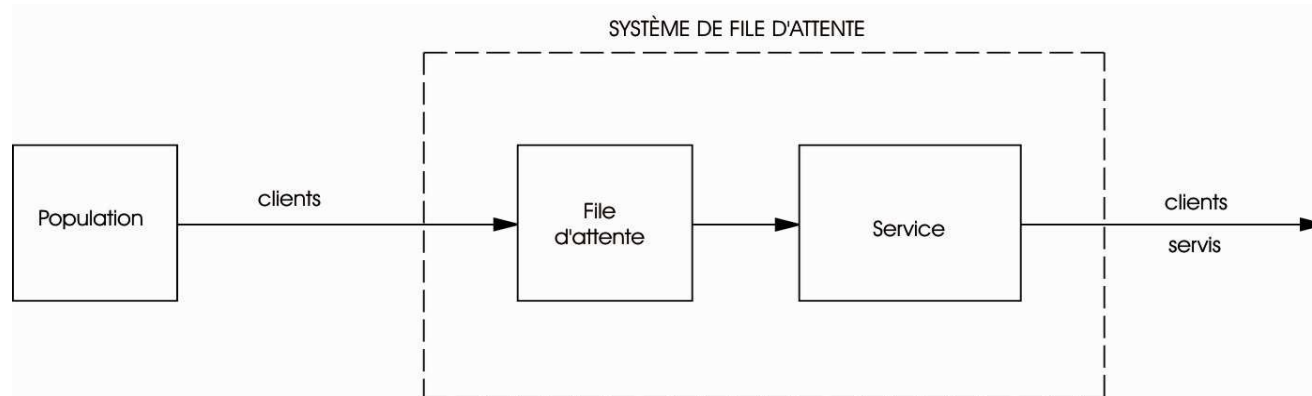


## Exemple 2 : marché boursier (suite)

- Probabilité que le prix de l'action augmente demain :
  - S'il a augmenté hier et aujourd'hui : 0,9
  - S'il a augmenté aujourd'hui, mais pas hier : 0,6
  - S'il a augmenté hier, mais pas aujourd'hui : 0,5
  - S'il n'a pas augmenté, ni hier, ni aujourd'hui : 0,3
- Matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

# Files d'attente



- Population : source de clients potentiels
- Clients : taux moyen d'arrivée *aléatoire*
- File d'attente : nombre fini ou infini de clients
- Service :
  - Nombre de serveurs
  - Taux moyen de service *aléatoire*
  - Stratégie de service (premier arrivé, premier servi)



# Modèle de file d'attente

---

- Situation transitoire : lorsque l'état du système dépend grandement de la situation initiale et du temps écoulé
- Situation d'équilibre : lorsque l'état du système peut être considéré indépendant de la situation initiale et du temps écoulé
- En situation d'équilibre :  $L = \lambda W$  (formule de Little)  
L = nombre moyen de clients dans le système  
 $\lambda$  = taux moyen d'arrivée des nouveaux clients  
W = temps moyen dans le système



# Modèle M/M/1

---

- Modèle de file d'attente le plus courant :
  - File d'attente : nombre infini de clients
  - Stratégie de service : premier arrivé, premier servi
  - Un seul serveur
  - Taux d'arrivée et de service obéissent à des *lois de Poisson*
  - De manière équivalente, le temps entre l'arrivée de deux clients successifs et le temps de service obéissent à des *lois exponentielles* : on parle de processus **Markoviens**
- Notation pour les modèles de file d'attente :  $X/Y/s$ , où  $X$  = loi du temps interarrivée,  $Y$  = loi du temps de service,  $s$  = nombre de serveurs



# Loi de Poisson

---

- Variable aléatoire  $X$  : nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire durant un intervalle de temps de longueur  $t$
- Exemple : nombre d'appels reçus par un téléphoniste
- Fonction de masse (taux moyen =  $\theta$ ) :

$$P_X(k) = P(X = k) = \frac{(\theta t)^k e^{-\theta t}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

- Exemple : un téléphoniste reçoit en moyenne 2 appels par minute; quelle est la probabilité de recevoir moins de 5 appels en 4 minutes?

$$P(X < 5) = \sum_{k=0}^4 P_X(k) = \sum_{k=0}^4 \frac{8^k e^{-8}}{k!} = 0.1$$



# Loi exponentielle

---

- Variable aléatoire  $X$  : temps d'attente entre deux apparitions du phénomène aléatoire en supposant que le nombre d'apparitions durant un intervalle  $t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta$

- La fonction de répartition vérifie alors :

$$1 - F_X(x) = P(X > x) = e^{-\theta x}, x \geq 0$$

- C'est la loi exponentielle de fonction de densité :

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}, \text{ si } x > 0; \quad 0, \text{ si } x \leq 0$$

- L'espérance mathématique est :  $E(X) = 1/\theta$

C'est le taux moyen entre deux apparitions du phénomène aléatoire



# Simulation

---

- Simuler un système stochastique consiste à *imiter* son comportement pour *estimer* sa performance
- Modèle de simulation : représentation du système stochastique permettant de générer un grand nombre d'*événements* aléatoires et d'en tirer des *observations statistiques*
- Nous verrons deux exemples simples de simulation :
  - Un jeu de hasard
  - Une file d'attente



## Exemple 1 : jeu de hasard

---

- Chaque partie consiste à tirer une pièce de monnaie jusqu'à ce que la différence entre le nombre de faces et le nombre de piles soit égale à 3
- Chaque tirage coûte 1\$
- Chaque partie jouée rapporte 8\$ au joueur
- Exemples :
  - FFF : gain de  $8\$ - 3\$ = 5\$$
  - PFPPP : gain de  $8\$ - 5\$ = 3\$$
  - PFFPFPPPPP : perte de  $8\$ - 11\$ = 3\$$
- Vaut-il la peine de jouer?



## Jeu de hasard (suite)

---

- Pour répondre à cette question, on va simuler le jeu
- Il y a deux façons de le faire :
  - On peut jouer pendant un certain temps sans miser d'argent
  - On peut simuler le jeu par ordinateur
- On va illustrer cette dernière option avec *Excel*
- *Excel* fournit la fonction ALEA() qui retourne un nombre généré aléatoirement dans l'intervalle  $[0,1]$  selon une loi uniforme
- Si le nombre généré par ALEA() est  $< 0.5$ , alors on a tiré P, sinon on a tiré F



## Jeu de hasard (suite)

---

- Voir le fichier *Jeu Hasard.xls*
- Cet exemple montre qu'on peut simuler le jeu, mais ne nous aide pas à prendre une décision!
- Pour cela, il faudrait voir ce qui se passe sur un grand nombre de parties et mesurer le gain moyen (ou la perte moyenne)
- Le fichier *Jeu Hasard 14.xls* montre qu'on peut conserver les résultats de 14 parties et mesurer la performance moyenne
- Ça ne nous aide pas beaucoup, car il y a trop de variation : parfois on gagne, parfois on perd!



## Jeu de hasard (suite)

---

- Pour prendre une décision éclairée, il faut augmenter le nombre de parties
- Le fichier *Jeu Hasard 1000.xls* montre les résultats de 1000 parties
- A chaque expérience (1000 parties), on obtient toujours une perte : il ne vaut donc pas la peine de jouer!
- De plus, on remarque que la moyenne du nombre de tirages est toujours près de 9 : c'est effectivement la moyenne *théorique*



# Éléments d'un modèle de simulation

---

- *Systeme stochastique* : tirages successifs
- *Horloge* : nombre de tirages
- Définition de l'état du système :  $N(t)$  = nombre de faces – nombre de piles après  $t$  tirages
- *Événements* modifiant l'état du système : tirage de pile ou de face
- *Méthode de génération d'événements* : génération d'un nombre aléatoire uniforme
- *Formule de changement d'état* :  $N(t+1) = N(t) + 1$ , si F est tirée;  $N(t) - 1$ , si P est tirée
- *Performance* :  $8 - t$ , lorsque  $N(t)$  atteint  $+3$  ou  $-3$



## Exemple 2 : file d'attente M/M/1

---

- En situation d'équilibre, plusieurs résultats analytiques (obtenus par analyse du modèle mathématique) sont connus (H&L, sec. 17.6) :
  - $\lambda$  : taux moyen d'arrivée
  - $\mu$  : taux moyen de service
  - Supposons que  $\lambda < \mu$
  - Nombre moyen de clients dans le système :
$$L = \lambda / (\mu - \lambda)$$
  - Temps moyen d'attente dans le système :
$$W = 1 / (\mu - \lambda)$$
- Peut-on vérifier ces résultats par *simulation*?



# Simulation d'un modèle M/M/1

---

- *Systeme stochastique* : file d'attente M/M/1
- *Horloge* : temps écoulé
- Définition de l'état du système :  $N(t)$  = nombre de clients dans le système au temps  $t$
- *Événements* modifiant l'état du système : arrivée ou fin de service d'un client
- *Formule de changement d'état* :  $N(t+1) = N(t) + 1$ , si arrivée;  $N(t) - 1$ , si fin de service



## Modèle M/M/1(suite)

---

- Nous allons voir deux méthodes pour étudier l'évolution du système dans le temps :
  - Par intervalles de temps fixe
  - Par génération d'événement
- On va supposer que les valeurs des paramètres de notre système sont :
  - $\lambda = 3$  clients/heure
  - $\mu = 5$  clients/heure



# Intervalles de temps fixe

---

1. Faire écouler le temps d'un petit intervalle  $\Delta t$
2. Mettre à jour le système en déterminant les événements qui ont pu se produire durant l'intervalle  $\Delta t$ ; recueillir l'information sur la performance du système
3. Retour à 1
  - Ici, les événements sont soit des arrivées, soit des départs (fins de service)
  - Si  $\Delta t$  est suffisamment petit, on peut considérer qu'il ne se produira qu'un seul événement (arrivée ou départ) durant cet intervalle de temps



## Intervalles de temps fixe (suite)

---

- Prenons  $\Delta t = 0.1$  heure (6 minutes)
- La probabilité qu'il y ait une arrivée durant cet intervalle de temps est :

$$P_A = 1 - e^{-\lambda\Delta t} = 1 - e^{-3/10} = 0.259$$

- La probabilité qu'il y ait un départ durant cet intervalle de temps est :

$$P_D = 1 - e^{-\mu\Delta t} = 1 - e^{-5/10} = 0.393$$

- Méthode de génération d'événement :
  - Tirer deux nombres aléatoires selon une loi  $U[0,1]$
  - Si premier nombre  $< 0.259$ , arrivée
  - Si deuxième nombre  $< 0.393$ , départ (si client servi)



## Intervalles de temps fixe : exemple

t (min)	N(t)	Nombre 1	Arrivée	Nombre 2	Départ
0	0				
6	1	0.096	Oui	-	
12	1	0.569	Non	0.665	Non
18	1	0.764	Non	0.842	Non
24	0	0.492	Non	0.224	Oui
30	0	0.950	Non	-	
36	0	0.610	Non	-	
42	1	0.145	Oui	-	
48	1	0.484	Non	0.552	Non
54	1	0.350	Non	0.590	Non
60	0	0.430	Non	0.041	Oui



## Intervalles de temps fixe : exemple

---

- D'après cet exemple, on peut estimer les performances du système
- Si on veut mesurer  $W$ , le temps moyen passé dans le système
- On a deux clients qui sont entrés dans le système et chacun y est resté 18 minutes ou 0.3 heures
- On peut estimer  $W = 0.3$
- La vraie valeur est  $W = 1/(\mu - \lambda) = 0.5$
- Il faudrait un échantillon beaucoup plus grand...
- D'autant plus nécessaire pour simuler le système en état d'équilibre!



# Génération d'événement

---

1. Faire écouler le temps jusqu'au prochain événement
2. Mettre à jour le système en fonction de l'événement qui vient de se produire et *générer aléatoirement le temps jusqu'au prochain événement*, recueillir l'information sur la performance du système
3. Retour à 1



## Génération d'événement : exemple

t (min)	N(t)	Temps interarrivée	Temps de service	Prochaine arrivée	Prochain départ	Prochain événement
0	0	2.019	-	2.019	-	Arrivée
2.019	1	16.833	13.123	18.852	15.142	Départ
15.142	0	-	-	18.852	-	Arrivée
18.852	1	28.878	22.142	47.730	40.994	Départ
40.994	0	-	-	47.730	-	Arrivée
47.730	1					



# Génération d'événement : exemple

---

- Cette méthode est implantée dans la macro **Queueing Simulator** dans *Excel*
- Voir le fichier [Queueing Simulator.xls](#) qui montrent une simulation comportant l'arrivée de 10000 clients
- Les résultats montrent que :
  - Nombre moyens de clients dans le système :  $L \approx 1.5$
  - Temps moyen dans le système :  $W \approx 0.5$
- On peut aussi simuler cette file d'attente (et bien d'autres) avec [IOR Tutorial](#)



# Modèles stochastiques : résumé

---

- Des résultats analytiques existent pour des modèles simples (comme M/M/1), mais pas pour des files d'attente plus complexes
- En général, on utilise la simulation
- Quelques outils disponibles avec Excel :
  - Queueing Simulator
  - Crystal Ball (H&L, sec. 20.6 + CD)
  - RiskSim (CD)
- Pour en savoir plus
  - Sur les modèles stochastiques : IFT3655
  - Sur la simulation : IFT3240