

2. Programmation linéaire

a. Modélisation

Programmation linéaire (PL)

- Problème classique de planification : affecter des *ressources limitées* à plusieurs *activités concurrentes*
- Programme = Plan (solution de ce problème)
- Programmation mathématique (RO) ≠ Programmation informatique
- Fonction linéaire: fonction dans laquelle chaque variable évolue linéairement

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$
- Modèle de PL = Modèle de programmation mathématique dans lequel toutes les fonctions sont linéaires

Exemple d'un modèle de PL

- Données du problème (*Wyndor Glass*, sec. 3.1 H&L):
 - Deux types de produits (produit 1, produit 2)
 - Trois usines (usine 1, usine 2, usine 3)
 - Capacité de production pour chaque usine (par semaine)
 - Profit par lot (20 unités) de chaque produit

	Produit 1 (tps de production, h/lot)	Produit 2 (tps de production, h/lot)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit(\$)/lot	3000	5000	

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Chaque lot du produit 1 (2) est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3 (2 et 3)
- Énoncé du problème: Déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots/semaine) de façon à maximiser le profit total
- Variables de décision:
 - x_1 = nombre de lots du produit 1
 - x_2 = nombre de lots du produit 2
- Fonction objectif:
 - Z = profit total
 - $Z = 3 x_1 + 5 x_2$ (profit total en milliers de \$)
 - Maximiser Z

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Contraintes de capacité de production
 - $x_1 \leq 4$ (usine 1)
 - $2 x_2 \leq 12$ (usine 2)
 - $3 x_1 + 2 x_2 \leq 18$ (usine 3)
- Contraintes de non négativité
 - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (nombre d'unités produites ≥ 0)

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Maximiser $Z = 3 x_1 + 5 x_2$

sous les contraintes:

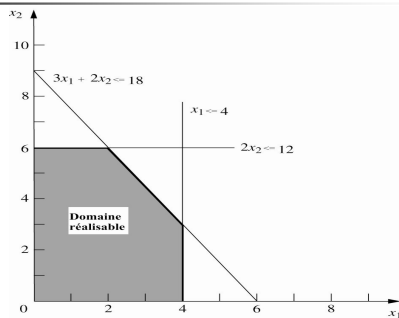
$$x_1 \leq 4 \quad (\text{usine 1})$$

$$2 x_2 \leq 12 \quad (\text{usine 2})$$

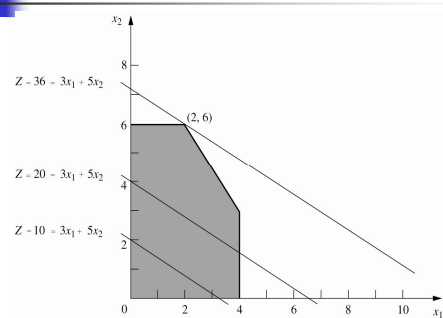
$$3 x_1 + 2 x_2 \leq 18 \quad (\text{usine 3})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{contraintes de non négativité})$$

Résolution graphique



Résolution graphique (suite)



Méthode graphique

- Tracer les droites correspondant aux contraintes
- Déterminer le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte
- Tracer les droites correspondant à la variation de l'objectif
 - Dans l'exemple:
 $Z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -(3/5)x_1 + (1/5)Z$
 - Ordonnée à l'origine (dépend de la valeur de Z): $(1/5)Z$
 - Pente: $-3/5$
 - Maximiser: augmenter Z
- Faire cet exemple avec le [IOR Tutorial](#)

Méthode graphique (suite)

- Autre exemple dans le [OR Tutor](#)
- Voir aussi *Worked Examples* chap. 3 (CD)
- Uniquement pour les modèles à deux variables
- Plus de deux variables: méthode du simplexe
- Logiciels proposant la méthode du simplexe:
 - Excel Solver
 - LINDO (CD)
 - CPLEX (CD)
- Problème *Wyndor Glass* avec [Excel Solver](#)

Excel Solver: conseils d'utilisation

- Entrer d'abord les données
- Les identifier clairement avec des noms d'intervalles
- Entrer chaque donnée dans une seule cellule (ne pas répéter la même donnée dans plusieurs formules)
- Utiliser des couleurs et des bordures pour distinguer les différents types de cellules:
 - Cellules données
 - Cellules variables
 - Cellules résultats
 - Cellule cible (objectif)
- Lire sec. 3.6 (H&L) et chap. 21 (CD)

Modèle général de PL

- m ressources (3 usines)
- n activités (2 produits)
- Niveau de l'activité j (taux de production du produit j): x_j
- Mesure de performance globale (profit total): Z
- Accroissement de Z résultant de l'augmentation d'une unité du niveau de l'activité j : c_j
- Quantité disponible de la ressource i : b_i
- Quantité de ressource i consommée par l'activité j : a_{ij}

Modèle général de PL (suite)

- Objectif
Maximiser $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$
- Contraintes fonctionnelles

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$
- Contraintes de non négativité

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

2. Programmation linéaire

13

Modèle général de PL (suite)

- On appelle ce modèle *forme standard*
- D'autres formes sont possibles et définissent aussi des modèles de PL
 - Minimiser au lieu de Maximiser: $\min f(x) = -\max -f(x)$
 - \geq , = dans certaines contraintes fonctionnelles au lieu de \leq
 - Certaines variables peuvent ne pas être forcées à être ≥ 0
 - $x \geq -4 \Leftrightarrow x + 4 \geq 0$
définir $y = x + 4, y \geq 0$
 - $-10 \leq x \leq -2 \Leftrightarrow 0 \leq x + 10 \leq 8$
définir $y = x + 10, y \geq 0$

2. Programmation linéaire

14

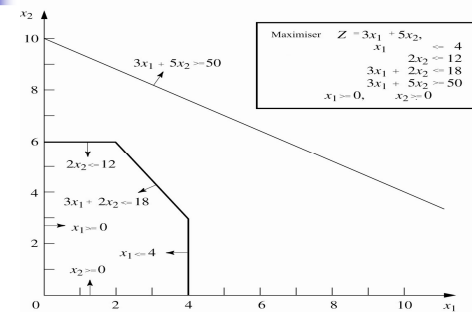
Terminologie de base en PL

- *Solution réalisable*: solution pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites: \in domaine réalisable
- *Solution non réalisable*: solution pour laquelle au moins une contrainte est violée; \notin domaine réalisable
- *Solution optimale*: solution ayant la meilleure valeur possible de l'objectif
- Modèle n'ayant *aucune solution optimale*:
 - Domaine réalisable vide
 - Objectif non borné
- Modèle ayant une *infinité de solutions optimales*

2. Programmation linéaire

15

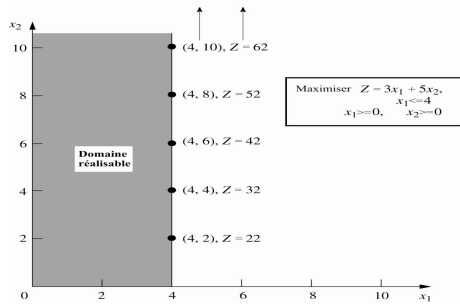
Domaine réalisable vide



2. Programmation linéaire

16

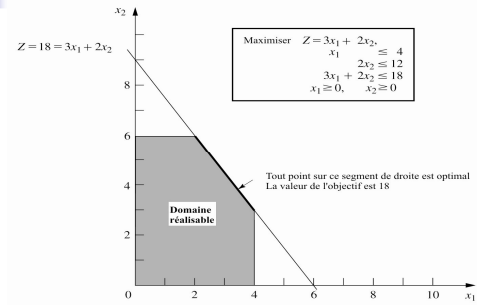
Objectif non borné



2. Programmation linéaire

17

Infinité de solutions optimales



2. Programmation linéaire

18

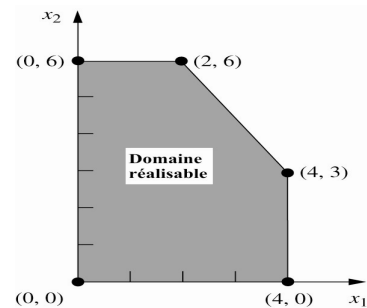
Interprétation géométrique

- **Point extrême du domaine réalisable** : solution réalisable correspondant à un coin du domaine réalisable
- En deux dimensions, un coin est la rencontre de deux droites (ou plus) définies par les frontières des contraintes
- **Théorème**: Supposons qu'un modèle de PL a un domaine réalisable non vide et borné; alors il existe au moins une solution optimale correspondant à un point extrême du domaine réalisable

2. Programmation linéaire

19

Points extrêmes



2. Programmation linéaire

20