

## 2. Programmation linéaire

- b. Méthode du simplexe
- c. Dualité
- d. Analyse de sensibilité

## Interprétation des variables d'écart

- Dans la solution optimale du problème *Wyndor Glass*, on a  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = x_5 = 0$
- Cela indique que les deux dernières ressources (temps aux usines 2 et 3) sont pleinement utilisées
- Une partie de la première ressource (temps à l'usine 1) n'est pas utilisée: 2 heures
- Voir l'exemple dans le [OR Tutor](#)

## Critère d'optimalité

- Exprimons l'objectif en fonction des variables hors-base dans la solution optimale
- Rappelons que dans cette solution, on a :

$$\begin{array}{rcl} x_2 & + \frac{1}{2} x_4 & = 6 \\ x_1 & - \frac{1}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5 & = 2 \end{array}$$

## Critère d'optimalité (suite)

- Après substitution dans l'objectif, on obtient :

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ &= 3(2 + (1/3)x_4 - (1/3)x_5) + 5(6 - (1/2)x_4) \\ &= 36 - (3/2)x_4 - x_5 \end{aligned}$$

- **Toute** solution réalisable  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  satisfait  $Z = 36 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - (3/2)x_4 - x_5 \leq 36$
- La valeur optimale est donc 36

## Critère d'optimalité (suite)

- Le critère d'optimalité s'énonce ainsi comme suit :
  - Étant donné que l'objectif s'exprime uniquement en fonction des variables hors-base de la solution de base réalisable courante
  - Si les coefficients de ces variables dans l'objectif sont tous négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est optimale
- Les coefficients des variables hors-base dans l'objectif sont appelés *coûts réduits* (ou coûts relatifs)

## Variable d'entrée

- Si au moins un coût réduit est positif pour la solution de base réalisable courante :
  - On n'a pas encore atteint une solution optimale
  - Il faut donc effectuer au moins un pivot
  - Quelle variable doit-on faire entrer dans la base?
- On propose de choisir celle dont le coût réduit est le plus grand parmi toutes les variables hors-base
- Cette variable fournit la plus grande augmentation marginale (par unité) de la valeur de l'objectif
- Attention : ce n'est peut-être pas la plus grande augmentation globale!

## Variable de sortie

- Lorsqu'on effectue un pivot, il faut choisir la variable qui va sortir de la base en tentant de garder toutes les variables non négatives
- Supposons que  $x_j$  est la variable d'entrée
- Chaque variable de base  $x_i$  s'exprime alors en fonction de la variable d'entrée (puisque les autres variables hors-base sont nulles) :

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}x_j$$

- Dans cette expression, les coefficients  $\bar{b}_i, \bar{a}_{ij}$  sont obtenus suite à plusieurs pivots
- On a nécessairement  $\bar{b}_i \geq 0$  (pourquoi?)

## Variable de sortie (suite)

- Pour que toutes les variables demeurent non négatives suite au pivot, on doit avoir :
 
$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}x_j \geq 0 \Leftrightarrow \bar{a}_{ij}x_j \leq \bar{b}_i$$
- Si  $\bar{a}_{ij} \leq 0$ , l'inégalité ne limite pas l'augmentation de  $x_j$
- Si cette condition est satisfaite pour **tous** les  $i$ , on peut donc augmenter indéfiniment  $x_j$  : l'objectif est non borné
- Si  $\bar{a}_{ij} > 0$ , l'inégalité limite l'augmentation de  $x_j$
- Variable de sortie : celle qui atteint  $\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$

## Méthode du simplexe: résumé

1. Obtenir une solution de base réalisable initiale
2. Vérifier le critère d'optimalité: si les coûts réduits de toutes les variables hors-base sont négatifs ou nuls, arrêter
3. Choisir la variable d'entrée  $x_j$ , soit celle qui a le coût réduit le plus élevé
4. Déterminer la variable de sortie:  $\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$
5. Effectuer un pivot et déterminer une nouvelle solution de base réalisable; retourner à l'étape 2

Voir l'exemple dans le [QR Tutor](#)

## Forme augmentée

- Tout modèle de PL peut se ramener à la forme suivante:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{n+i} &\geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

- Hypothèse:  $b_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$
- But: obtenir une solution de base initiale

## Transformation du min au max

- Supposons qu'on doit minimiser l'objectif au lieu de le maximiser
- On utilise alors la propriété suivante:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j = - \max \sum_{j=1}^n -c_j x_j$$

- On résout le problème de maximisation en changeant les signes des coefficients dans l'objectif
- La valeur optimale du problème de minimisation est l'opposé de celle du problème de maximisation

## Transformation du $\leq$ en $=$

Si  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ , il y a deux cas :

- $b_i \geq 0$ , on ajoute une variable d'écart  $x_{n+i} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

- $b_i < 0$ , on multiplie l'inégalité par -1 et on se ramène au cas de la page suivante

## Transformation du $\geq$ en $=$

Si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ , il y a deux cas :

- $b_i \leq 0$ , on multiplie l'inégalité par -1 pour se ramener au cas de la page précédente
- $b_i > 0$ , on soustrait une variable de surplus  $x_{n+i} \geq 0$   
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

On se ramène alors au cas de la page suivante

## Ajout de variables artificielles

Si  $\sum_{j=1, \dots, n} a_{ij}x_j = b_i$  et qu'aucune variable n'est isolée (une variable est isolée si elle est à coefficient 1 dans cette équation et à coefficient 0 dans les autres):

- On ajoute une **variable artificielle**  $x_{n+i} \geq 0$
- On lui associe un **profit très négatif** :  $-M$

$$\max \sum_{j=1, \dots, n} c_j x_j - M x_{n+i}$$

...

$$\sum_{j=1, \dots, n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

...

Si le problème est réalisable, on doit avoir  $x_{n+i} = 0$

## Ajout de variables artificielles (suite)

- **Méthode du grand M**
  - Optimiser en utilisant une fonction objective formée de la fonction de coût initiale et de la somme, très fortement pénalisée, des variables artificielles
- **Méthode à deux phases**
  - **Phase 1**: trouver une solution réalisable en minimisant la somme des variables artificielles
  - **Phase 2**: optimiser en revenant à la fonction de coût initial à partir de la solution initiale trouvée dans la phase 1

## Variables artificielles: exemple

$$\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## Transformations

- Système initial

$$\begin{aligned} 0.3 x_1 + 0.1 x_2 &\leq 2.7 \\ 0.5 x_1 + 0.5 x_2 &= 6 \\ 0.6 x_1 + 0.4 x_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

- Système d'équations

$$\begin{aligned} 0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} &= 2.7 \\ 0.5 x_1 + 0.5 x_2 &= 6 \\ 0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} &= 6 \\ x_{s1} \geq 0, x_{s2} &\geq 0 \end{aligned}$$

## Ajout de variables artificielles

- Système d'équations

$$\begin{aligned} 0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} &= 2.7 \\ 0.5 x_1 + 0.5 x_2 &= 6 \\ 0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} &= 6 \\ x_{s1} \geq 0, x_{s2} &\geq 0 \end{aligned}$$

- Ajout de variables artificielles

$$\begin{aligned} 0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} &= 2.7 \\ 0.5 x_1 + 0.5 x_2 + x_{a2} &= 6 \\ 0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} + x_{a3} &= 6 \\ x_{s1} \geq 0, x_{s2} \geq 0, x_{a2} \geq 0, x_{a3} &\geq 0 \end{aligned}$$

## Démarrer la méthode du simplexe

- Ajout de variables artificielles

$$\begin{aligned} 0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} &= 2.7 \\ 0.5 x_1 + 0.5 x_2 + x_{a2} &= 6 \\ 0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} + x_{a3} &= 6 \\ x_{s1} \geq 0, x_{s2} \geq 0, x_{a2} \geq 0, x_{a3} &\geq 0 \end{aligned}$$

- Méthode à deux phases

- Phase 1: min  $x_{a2} + x_{a3}$  jusqu'à obtenir une valeur optimale nulle (si le PL a une solution réalisable)
- Phase 2: min  $0.4 x_1 + 0.5 x_2$

- Méthode du grand M

- min  $0.4 x_1 + 0.5 x_2 + M x_{a2} + M x_{a3}$

## Variables à valeurs quelconques

- Si une variable  $x_j$  peut prendre des valeurs négatives, on introduit deux variables  $x_j^+ \geq 0$  et  $x_j^- \geq 0$   
On pose alors  $x_j = x_j^+ - x_j^-$
- Autre possibilité : si  $x_j \geq L_j$  ( $L_j$  est une constante négative)  
On pose alors  $x_j^+ = x_j - L_j \geq 0$

## Pour expérimenter

- Pour des petits modèles (moins de 6 variables et 6 contraintes fonctionnelles) : essayer le [IOR Tutorial](#)
- Pour des modèles plus gros, modéliser et résoudre avec *Excel Solver*
- Revoir le cas [Wyndor Glass](#)
- Pour des modèles encore plus gros, essayer Lindo/Lingo et CPLEX/MPL (CD)

## Dualité : exemple *Wyndor Glass*

- Supposons qu'une compagnie partenaire de *Wyndor Glass*, appelée *Dual Glass*, aimerait louer du temps aux usines afin de fabriquer des lots de produits
- Quel prix (en \$/h) pour chaque usine devrait-elle demander de telle sorte que le résultat soit équitable, soit aucun profit ni perte pour aucun des deux partenaires?

## Modèle dual

- Variables de décision :
  - $y_i$  = prix (\$/h) pour louer du temps à l'usine  $i$
- *Dual Glass* cherche à minimiser le prix total qu'elle devra payer pour le temps loué aux trois usines
- Le prix total pour chaque usine peut être exprimé comme le temps de production maximum (h) \* prix pour louer du temps (\$/h)
- Objectif :  $\min W = 4 y_1 + 12 y_2 + 18 y_3$

## Modèle dual (suite)

- Les contraintes assurent que le prix total associé à la fabrication d'un lot de chaque produit ne doit pas être inférieure au profit (\$/lot) qu'en retire *Wyndor Glass*
- Le prix total associé à un produit peut être exprimé comme le temps consacré à la production de chaque lot (h/lot) \* le prix pour louer du temps (\$/h)
- Contrainte associée au produit 1 :  $y_1 + 3 y_3 \geq 3$
- Contrainte associée au produit 2 :  $2 y_2 + 2 y_3 \geq 5$

## Modèle dual (suite)

- Voici le modèle pour *Dual Glass*, appelé *modèle dual* :

$$\text{Min } W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

- Rappel : modèle pour *Wyndor Glass*, dit *modèle primal*

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Programmation linéaire

25

## Couple primal-dual

- On remarque les relations suivantes entre les deux modèles

Primal	Dual
Variable	Contrainte
Contrainte	Variable
Max	Min
Profit unitaire	Terme de droite
Terme de droite	Coût unitaire
Ligne	Colonne
Colonne	Ligne
Contrainte $\leq$	Contrainte $\geq$

2. Programmation linéaire

26

## Coûts réduits

- Rappelons que pour la solution de base optimale du problème *Wyndor Glass*, l'objectif s'écrit :

$$Z = 36 - (3/2)x_4 - x_5$$

- $x_4$  et  $x_5$  sont les variables hors base et les coefficients  $-3/2$  et  $-1$  sont leurs *coûts réduits*
- Si on augmente la valeur de  $x_4$  de 1 unité, le profit diminue de  $3/2$
- Mais  $x_4$  est la variable d'écart associée à la contrainte de ressource pour l'usine 2 : augmenter  $x_4$  de 1 veut dire diminuer le terme de droite correspondant de 1

2. Programmation linéaire

27

## Multiplicateurs optimaux

- Si *Wyndor Glass* loue à *Dual Glass* une heure de temps de production à l'usine 2 :
  - La capacité à l'usine 2 diminue de 1 h (diminution de 1 unité du terme de droite)
  - La valeur de l'objectif diminue de  $3/2$
  - Pour retrouver un profit total égal, il faudra donc demander un prix de  $3/2$  (1500\$) pour chaque heure de temps louée à l'usine 2
- De manière générale, la solution optimale du dual est donnée par : **—coûts réduits des variables d'écart** (aussi appelés **multiplicateurs optimaux**)
- Dans notre exemple :  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 3/2$ ,  $y_3 = 1$

2. Programmation linéaire

28

## Écarts complémentaires

- Le prix de la variable  $y_1$  est fixé à 0
  - Wyndor Glass* n'exige rien pour une heure louée à l'usine 1
  - Bien sûr, puisqu'il lui reste du temps de production non utilisé (la variable d'écart  $x_3$  est  $> 0$ )
  - Un prix  $> 0$  ferait augmenter le profit, et la solution ne serait plus équitable
- Les prix des autres variables est  $> 0$ 
  - Puisque le temps de production est utilisé à plein, louer une heure à *Dual Glass* revient à perdre une heure de production, donc à réduire le profit total
  - Pour retrouver le même profit, il faut exiger un prix égal au multiplicateur optimal (= - coût réduit)
- Écarts complémentaires :  $x_{n+i} \cdot y_i = 0$

## Analyse de sensibilité

- En général, le coût réduit d'une variable hors-base indique le changement dans l'objectif apporté par une augmentation de 1 unité de la valeur de cette variable
- Pour les variables d'écart, ce principe peut se formuler ainsi : le coût réduit d'une variable d'écart hors-base indique le changement dans l'objectif apporté par une diminution de 1 unité du terme de droite associé
- Ceci est un exemple d'*analyse de sensibilité* : un paramètre (ici, un terme de droite) est modifié et on mesure la sensibilité de la solution optimale à ce changement

## Analyse de sensibilité (suite)

- On peut mesurer la sensibilité de la solution optimale à un changement d'un terme de droite ou d'un coefficient dans l'objectif
  - En résolvant à nouveau le modèle modifié
  - En utilisant le [rapport de sensibilité d'Excel Solver](#)
- Ce rapport (pour *Wyndor Glass*) nous apprend que:
  - Les multiplicateurs optimaux (Shadow Prices) sont 0, 1500 et 1000
  - La capacité à l'usine 3 peut prendre n'importe quelle valeur entre 12h et 24h sans changer la solution optimale du dual
  - Le profit unitaire pour le produit 1 peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 7500\$ sans changer la solution optimale du primal
- Voir la procédure graphique dans le [IOR Tutorial](#)

## Dualité et analyse de sensibilité

- Tout modèle de PL possède un dual
- Si un modèle de PL possède une solution optimale, il en est de même pour son dual, et les valeurs optimales des deux modèles sont égales
- Solution optimale du dual = multiplicateurs optimaux
- On peut les lire directement dans le tableau optimal du simplexe : ce sont les coefficients dans la ligne correspondant à l'objectif
- Coût réduit (-coefficient dans la ligne de l'objectif) : mesure la variation de l'objectif entraîné par une augmentation de 1 unité de la valeur de la variable hors-base associée
- Pour en savoir plus, suivre IFT2505