

## 2. Programmation linéaire

b. Méthode du simplexe

c. Dualité

d. Analyse de sensibilité



# Interprétation des variables d'écart

---

- Dans la solution optimale du problème *Wyndor Glass*, on a  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = x_5 = 0$
- Cela indique que les deux dernières ressources (temps aux usines 2 et 3) sont pleinement utilisées
- Une partie de la première ressource (temps à l'usine 1) n'est pas utilisée: 2 heures
- Voir l'exemple dans le [OR Tutor](#)



# Critère d'optimalité

---

- Exprimons l'objectif en fonction des variables hors-base dans la solution optimale
- Rappelons que dans cette solution, on a :

$$\begin{array}{rclcl} & x_2 & + \frac{1}{2} x_4 & & = 6 \\ x_1 & & - \frac{1}{3} x_4 & + \frac{1}{3} x_5 & = 2 \end{array}$$



## Critère d'optimalité (suite)

---

- Après substitution dans l'objectif, on obtient :

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ &= 3(2 + (1/3)x_4 - (1/3)x_5) + 5(6 - (1/2)x_4) \\ &= 36 - (3/2)x_4 - x_5 \end{aligned}$$

- **Toute** solution réalisable  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  satisfait

$$Z = 36 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - (3/2)x_4 - x_5 \leq 36$$

- La valeur optimale est donc 36



## Critère d'optimalité (suite)

---

- Le critère d'optimalité s'énonce ainsi comme suit :
  - Étant donné que l'objectif s'exprime uniquement en fonction des variables hors-base de la solution de base réalisable courante
  - Si les coefficients de ces variables dans l'objectif sont tous négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est optimale
- Les coefficients des variables hors-base dans l'objectif sont appelés *coûts réduits* (ou coûts relatifs)



# Variable d'entrée

---

- Si au moins un coût réduit est positif pour la solution de base réalisable courante :
  - On n'a pas encore atteint une solution optimale
  - Il faut donc effectuer au moins un pivot
  - Quelle variable doit-on faire entrer dans la base?
- On propose de choisir celle dont le coût réduit est le plus grand parmi toutes les variables hors-base
- Cette variable fournit la plus grande augmentation marginale (par unité) de la valeur de l'objectif
- Attention : ce n'est peut-être pas la plus grande augmentation globale!



## Variable de sortie

---

- Lorsqu'on effectue un pivot, il faut choisir la variable qui va sortir de la base en tentant de garder toutes les variables non négatives
- Supposons que  $x_j$  est la variable d'entrée
- Chaque variable de base  $x_i$  s'exprime alors en fonction de la variable d'entrée (puisque les autres variables hors-base sont nulles) :

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}x_j$$

- Dans cette expression, les coefficients  $\bar{b}_i, \bar{a}_{ij}$  sont obtenus suite à plusieurs pivots
- On a nécessairement  $\bar{b}_i \geq 0$  (pourquoi?)



## Variable de sortie (suite)

- Pour que toutes les variables demeurent non négatives suite au pivot, on doit avoir :

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}x_j \geq 0 \Leftrightarrow \bar{a}_{ij}x_j \leq \bar{b}_i$$

- Si  $\bar{a}_{ij} \leq 0$ , l'inégalité ne limite pas l'augmentation de  $x_j$

- Si cette condition est satisfaite pour **tous** les  $i$ , on peut donc augmenter indéfiniment  $x_j$  : l'objectif est non borné

- Si  $\bar{a}_{ij} > 0$ , l'inégalité limite l'augmentation de  $x_j$

- Variable de sortie : celle qui atteint  $\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$



# Méthode du simplexe: résumé

1. Obtenir une solution de base réalisable initiale
2. Vérifier le critère d'optimalité: si les coûts réduits de toutes les variables hors-base sont négatifs ou nuls, arrêter
3. Choisir la variable d'entrée  $x_j$ , soit celle qui a le coût réduit le plus élevé
4. Déterminer la variable de sortie:  $\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$
5. Effectuer un pivot et déterminer une nouvelle solution de base réalisable; retourner à l'étape 2

Voir l'exemple dans le [OR Tutor](#)



# Forme augmentée

---

- Tout modèle de PL peut se ramener à la forme suivante:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{n+i} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- Hypothèse:  $b_i \geq 0, i=1,2,\dots,m$
- But: obtenir une solution de base initiale



# Transformation du min au max

---

- Supposons qu'on doit minimiser l'objectif au lieu de le maximiser
- On utilise alors la propriété suivante:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j = - \max \sum_{j=1}^n -c_j x_j$$

- On résout le problème de maximisation en changeant les signes des coefficients dans l'objectif
- La valeur optimale du problème de minimisation est l'opposé de celle du problème de maximisation



## Transformation du $\leq$ en $=$

---

Si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ , il y a deux cas :

- $b_i \geq 0$ , on ajoute une variable d'écart  $x_{n+i} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

- $b_i < 0$ , on multiplie l'inégalité par -1 et on se ramène au cas de la page suivante



## Transformation du $\geq$ en $=$

---

Si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ , il y a deux cas :

- $b_i \leq 0$ , on multiplie l'inégalité par -1 pour se ramener au cas de la page précédente

- $b_i > 0$ , on soustrait une variable de surplus  $x_{0i} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{0i} = b_i$$

On se ramène alors au cas de la page suivante



## Ajout de variables artificielles

Si  $\sum_{j=1,\dots,n} a_{ij} x_j = b_i$  et qu'aucune variable n'est isolée (une variable est isolée si elle est à coefficient 1 dans cette équation et à coefficient 0 dans les autres):

- On ajoute une **variable artificielle**  $x_{n+i} \geq 0$
- On lui associe un **profit très négatif** :  $-M$

$$\max \sum_{j=1,\dots,n} c_j x_j - M x_{n+i}$$

...

$$\sum_{j=1,\dots,n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

...

Si le problème est réalisable, on doit avoir  $x_{n+i} = 0$



# Ajout de variables artificielles (suite)

---

- **Méthode du grand M**
  - Optimiser en utilisant une fonction objective formée de la fonction de coût initiale et de la somme, très fortement pénalisée, des variables artificielles
- **Méthode à deux phases**
  - **Phase 1**: trouver une solution réalisable en minimisant la somme des variables artificielles
  - **Phase 2**: optimiser en revenant à la fonction de coût initial à partir de la solution initiale trouvée dans la phase 1



# Variables artificielles: exemple

---

$$\min Z = 0.4 x_1 + 0.5 x_2$$

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 2.7$$

$$0.5 x_1 + 0.5 x_2 = 6$$

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



# Transformations

---

- Système initial

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 2.7$$

$$0.5 x_1 + 0.5 x_2 = 6$$

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 \geq 6$$

- Système d'équations

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} = 2.7$$

$$0.5 x_1 + 0.5 x_2 = 6$$

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} = 6$$

$$x_{s1} \geq 0, x_{s2} \geq 0$$



# Ajout de variables artificielles

---

- Système d'équations

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} = 2.7$$

$$0.5 x_1 + 0.5 x_2 = 6$$

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} = 6$$

$$x_{s1} \geq 0, x_{s2} \geq 0$$

- Ajout de variables artificielles

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} = 2.7$$

$$0.5 x_1 + 0.5 x_2 + x_{a2} = 6$$

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} + x_{a3} = 6$$

$$x_{s1} \geq 0, x_{s2} \geq 0, x_{a2} \geq 0, x_{a3} \geq 0$$



# Démarrer la méthode du simplexe

---

- Ajout de variables artificielles

$$0.3 x_1 + 0.1 x_2 + x_{s1} = 2.7$$

$$0.5 x_1 + 0.5 x_2 + x_{a2} = 6$$

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_{s2} + x_{a3} = 6$$

$$x_{s1} \geq 0, x_{s2} \geq 0, x_{a2} \geq 0, x_{a3} \geq 0$$

- Méthode à deux phases

- Phase 1: min  $x_{a2} + x_{a3}$  jusqu'à obtenir une valeur optimale nulle (si le PL a une solution réalisable)
- Phase 2: min  $0.4 x_1 + 0.5 x_2$

- Méthode du grand  $M$

- min  $0.4 x_1 + 0.5 x_2 + M x_{a2} + M x_{a3}$



# Variables à valeurs quelconques

---

- Si une variable  $x_j$  peut prendre des valeurs négatives, on introduit deux variables  $x_j^+ \geq 0$  et  $x_j^- \geq 0$   
On pose alors  $x_j = x_j^+ - x_j^-$
- Autre possibilité : si  $x_j \geq L_j$   
( $L_j$  est une constante négative)  
On pose alors  $x_j^+ = x_j - L_j \geq 0$



# Pour expérimenter

---

- Pour des petits modèles (moins de 6 variables et 6 contraintes fonctionnelles) : essayer le [IOR Tutorial](#)
- Pour des modèles plus gros, modéliser et résoudre avec *Excel Solver*
- Revoir le cas [Wyndor Glass](#)
- Pour des modèles encore plus gros, essayer Lindo/Lingo et CPLEX/MPL (CD)



## Dualité : exemple *Wyndor Glass*

---

- Supposons qu'une compagnie partenaire de *Wyndor Glass*, appelée *Dual Glass*, aimerait louer du temps aux usines afin de fabriquer des lots de produits
- Quel prix (en \$/h) pour chaque usine devrait-elle demander de telle sorte que le résultat soit équitable, soit aucun profit ni perte pour aucun des deux partenaires?



# Modèle dual

---

- Variables de décision :
  - $y_i =$  prix (\$/h) pour louer du temps à l'usine  $i$
- *Dual Glass* cherche à minimiser le prix total qu'elle devra payer pour le temps loué aux trois usines
- Le prix total pour chaque usine peut être exprimé comme le temps de production maximum (h) \* prix pour louer du temps (\$/h)
- Objectif :  $\min W = 4 y_1 + 12 y_2 + 18 y_3$



## Modèle dual (suite)

---

- Les contraintes assurent que le prix total associé à la fabrication d'un lot de chaque produit ne doit pas être inférieure au profit (\$/lot) qu'en retire *Wyndor Glass*
- Le prix total associé à un produit peut être exprimé comme le temps consacré à la production de chaque lot (h/lot) \* le prix pour louer du temps (\$/h)
- Contrainte associée au produit 1 :  $y_1 + 3 y_3 \geq 3$
- Contrainte associée au produit 2 :  $2y_2 + 2 y_3 \geq 5$



## Modèle dual (suite)

- Voici le modèle pour *Dual Glass*, appelé *modèle dual* :

$$\text{Min } W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

- Rappel : modèle pour *Wyndor Glass*, dit *modèle primal*

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Couple primal-dual

- On remarque les relations suivantes entre les deux modèles

<b>Primal</b>	<b>Dual</b>
Variable	Contrainte
Contrainte	Variable
Max	Min
Profit unitaire	Terme de droite
Terme de droite	Coût unitaire
Ligne	Colonne
Colonne	Ligne
Contrainte $\leq$	Contrainte $\geq$



## Coûts réduits

---

- Rappelons que pour la solution de base optimale du problème *Wyndor Glass*, l'objectif s'écrit :

$$Z = 36 - (3/2) x_4 - x_5$$

- $x_4$  et  $x_5$  sont les variables hors base et les coefficients  $-3/2$  et  $-1$  sont leurs *coûts réduits*
- Si on augmente la valeur de  $x_4$  de 1 unité, le profit diminue de  $3/2$
- Mais  $x_4$  est la variable d'écart associée à la contrainte de ressource pour l'usine 2 : augmenter  $x_4$  de 1 veut dire diminuer le terme de droite correspondant de 1



# Multiplicateurs optimaux

---

- Si *Wyndor Glass* loue à *Dual Glass* une heure de temps de production à l'usine 2 :
  - La capacité à l'usine 2 diminue de 1 h (diminution de 1 unité du terme de droite)
  - La valeur de l'objectif diminue de  $3/2$
  - Pour retrouver un profit total égal, il faudra donc demander un prix de  $3/2$  (1500\$) pour chaque heure de temps louée à l'usine 2
- De manière générale, la solution optimale du dual est donnée par: **–coûts réduits des variables d'écart** (aussi appelés **multiplicateurs optimaux**)
- Dans notre exemple :  $y_1 = 0, y_2 = 3/2, y_3 = 1$



# Écarts complémentaires

---

- Le prix de la variable  $y_1$  est fixé à 0
  - *Wyndor Glass* n'exige rien pour une heure louée à l'usine 1
  - Bien sûr, puisqu'il lui reste du temps de production non utilisé (la variable d'écart  $x_3$  est  $> 0$ )
  - Un prix  $> 0$  ferait augmenter le profit, et la solution ne serait plus équitable
- Les prix des autres variables est  $> 0$ 
  - Puisque le temps de production est utilisé à plein, louer une heure à *Dual Glass* revient à perdre une heure de production, donc à réduire le profit total
  - Pour retrouver le même profit, il faut exiger un prix égal au multiplicateur optimal (= - coût réduit)
- Écarts complémentaires :  $x_{n+i} \cdot y_i = 0$



# Analyse de sensibilité

---

- En général, le coût réduit d'une variable hors-base indique le changement dans l'objectif apporté par une augmentation de 1 unité de la valeur de cette variable
- Pour les variables d'écart, ce principe peut se formuler ainsi : le coût réduit d'une variable d'écart hors-base indique le changement dans l'objectif apporté par une diminution de 1 unité du terme de droite associé
- Ceci est un exemple d'*analyse de sensibilité* : un paramètre (ici, un terme de droite) est modifié et on mesure la sensibilité de la solution optimale à ce changement



## Analyse de sensibilité (suite)

---

- On peut mesurer la sensibilité de la solution optimale à un changement d'un terme de droite ou d'un coefficient dans l'objectif
  - En résolvant à nouveau le modèle modifié
  - En utilisant le [rapport de sensibilité d'Excel Solver](#)
- Ce rapport (pour *Wyndor Glass*) nous apprend que:
  - Les multiplicateurs optimaux (Shadow Prices) sont 0, 1500 et 1000
  - La capacité à l'usine 3 peut prendre n'importe quelle valeur entre 12h et 24h sans changer la solution optimale du dual
  - Le profit unitaire pour le produit 1 peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 7500\$ sans changer la solution optimale du primal
- Voir la procédure graphique dans le [IOR Tutorial](#)



# Dualité et analyse de sensibilité

---

- Tout modèle de PL possède un dual
- Si un modèle de PL possède une solution optimale, il en est de même pour son dual, et les valeurs optimales des deux modèles sont égales
- Solution optimale du dual = multiplicateurs optimaux
- On peut les lire directement dans le tableau optimal du simplexe : ce sont les coefficients dans la ligne correspondant à l'objectif
- Coût réduit (-coefficient dans la ligne de l'objectif): mesure la variation de l'objectif entraîné par une augmentation de 1 unité de la valeur de la variable hors-base associée
- Pour en savoir plus, suivre IFT2505