

7. Programmation non linéaire

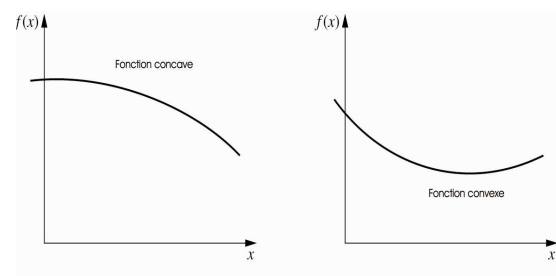
Fonctions convexes et concaves

- Soit x' et x'' deux points dans \mathbb{R}^n
- Le **segment de droite** joignant ces deux points est l'ensemble des points $x = x' + \lambda(x'' - x') = \lambda x'' + (1 - \lambda)x'$, où $\lambda \in [0, 1]$
- Une fonction f est **convexe** si tout point sur le segment de droite joignant $f(x')$ et $f(x'')$ se trouve au dessus du graphe de f :
 $f(\lambda x'' + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x'') + (1 - \lambda)f(x')$, pour toute paire de points x', x''

Fonctions convexes et concaves

- Si cette inégalité est stricte, la fonction f est dite **strictement convexe**
- Si on remplace \leq par \geq dans cette inégalité, la fonction f est dite **concave** :
 $f(\lambda x'' + (1 - \lambda)x') \geq \lambda f(x'') + (1 - \lambda)f(x')$, pour toute paire de points x', x''
- Si cette dernière inégalité est stricte, la fonction f est dite **strictement concave**

Fonctions convexes et concaves



Tests de convexité et de concavité

- Supposons que f est une fonction deux fois dérivable d'une seule variable
- f est convexe ssi $\frac{d^2 f(x)}{d^2 x} \geq 0, \forall x$
- f est strictement convexe ssi $\frac{d^2 f(x)}{d^2 x} > 0, \forall x$
- f est concave ssi $\frac{d^2 f(x)}{d^2 x} \leq 0, \forall x$
- f est strictement concave ssi $\frac{d^2 f(x)}{d^2 x} < 0, \forall x$

7. Programmation non linéaire

5

Tests de convexité et de concavité

- Supposons que f est une fonction deux fois dérivable de deux variables
- Dans ce cas, on utilise le tableau suivant :

	Convexe	Strict. convexe	Concave	Strict. concave
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2$	≥ 0	> 0	≥ 0	> 0

7. Programmation non linéaire

6

Tests de convexité et de concavité

- Ces tests se généralisent à des fonctions de plus de deux variables en utilisant le Hessien (la matrice des dérivées secondes)
- Deux résultats importants pour tester la convexité et la concavité de fonctions quelconques :
 - Une fonction qui s'exprime comme la somme de fonctions convexes (concaves) est convexe (concave)
 - L'opposé d'une fonction concave est convexe et vice-versa
- Voir appendice 2, H&L, et TP 9 pour des exemples

7. Programmation non linéaire

7

Ensembles convexes

- Un ensemble est convexe si, pour toute paire de points de l'ensemble, le segment de droite joignant ces deux points est contenu dans l'ensemble
- On peut démontrer qu'un ensemble est convexe grâce aux propriétés suivantes :
 - Si f est convexe, alors $\{x \mid f(x) \leq b\}$ est convexe
 - Si f est concave, alors $\{x \mid f(x) \geq b\}$ est convexe
 - L'intersection d'ensembles convexes est convexe

7. Programmation non linéaire

8

Programmation non linéaire

- Un modèle de programmation non linéaire prend la forme suivante :

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- On suppose qu'au moins une des fonctions f et g_i est non linéaire
- En général, on suppose aussi que toutes ces fonctions sont deux fois dérivables

Exemple 1

- On modifie l'exemple *Wyndor Glass* (sect. 2) en remplaçant certaines contraintes par une contrainte non linéaire

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

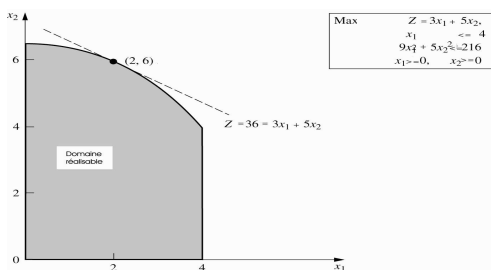
$$x_1 \leq 4$$

$$9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- Voyons comment on peut représenter ce problème graphiquement

Exemple 1 (suite)



Exemple 1 (suite)

- On remarque que l'objectif est concave (car linéaire) et que le domaine réalisable est convexe : c'est un modèle de **programmation convexe**
- Ici, la solution optimale est sur la frontière du domaine réalisable, mais ne correspond pas à un coin (l'intersection de deux contraintes)
- Résolution par Excel : [Exemple1_NL.xls](#)

Exemple 2

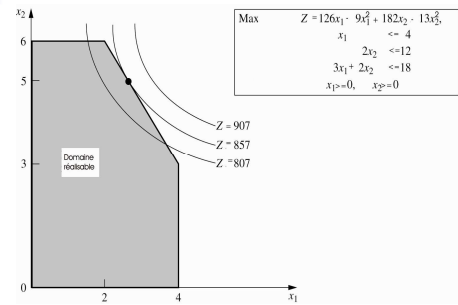
- On modifie encore l'exemple *Wyndor Glass* (sect. 2), mais cette fois en remplaçant l'objectif linéaire par une fonction non linéaire

$$\begin{aligned} \max Z &= 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Programmation non linéaire

13

Exemple 2 (suite)



7. Programmation non linéaire

14

Exemple 2 (suite)

- On remarque que l'objectif est concave et que le domaine réalisable est convexe : c'est aussi un modèle de programmation convexe
- Ici, la solution optimale (8/3,5) est sur la frontière du domaine réalisable, mais ne correspond pas à un point extrême du domaine réalisable
- Résolution par Excel : [Exemple2_NL.xls](#)

7. Programmation non linéaire

15

Exemple 3

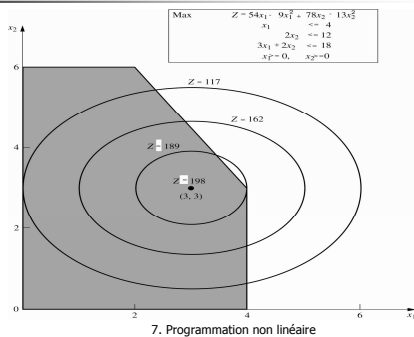
- Un exemple semblable au précédent, avec une fonction objectif toujours concave, mais différente

$$\begin{aligned} \max Z &= 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Programmation non linéaire

16

Exemple 3 (suite)



7. Programmation non linéaire

17

Exemple 3 (suite)

- Il s'agit à nouveau d'un modèle de programmation convexe
- Ici, la solution optimale (3,3) est à l'intérieur du domaine réalisable
- La fonction objectif est la somme de deux fonctions d'une seule variable
- Si on annule les dérivées de chacune de ces fonctions, on obtient la solution unique (3,3), qui se trouve à l'intérieur du domaine : c'est donc nécessairement la solution optimale
- Résolution par Excel : [Exemple3_NL.xls](#)

7. Programmation non linéaire

18

Exemple 4

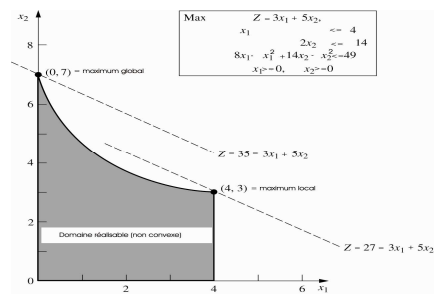
- Un exemple semblable au premier, mais on introduit une contrainte non linéaire qui définit un domaine réalisable non convexe

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 14 \\ 8x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2 &\leq 49 \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Programmation non linéaire

19

Exemple 4 (suite)



7. Programmation non linéaire

20

Exemple 4 (suite)

- Dans ce modèle de **programmation non convexe**, on remarque la présence de deux maxima locaux :
 - x est un **maximum local** si $f(x) \geq f(x')$, pour tout x' réalisable suffisamment près de x
 - (4,3) et (0,7) sont des maxima locaux, mais $x^*=(0,7)$ est le **maximum global** : $f(x^*) \geq f(x')$, pour tout x' réalisable
- Les méthodes classiques de programmation non linéaire permettent d'identifier un maximum local, mais pas nécessairement le maximum global!
- Programmation convexe : maximum local = global
- Résolution par Excel : [Exemple4_NL.xls](#)

Optimisation sans contrainte

- On considère le cas d'un modèle de programmation non linéaire dans lequel il n'y a aucune contrainte :

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- On peut alors montrer que :

si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un maximum local, alors

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n, \text{ en } x = x^*$$

- En d'autres mots, lorsque la dérivée s'annule en un point donné, ce point **peut être** un maximum local
- Il peut aussi être : minimum local ou point de selle

Optimisation sans contrainte (suite)

- Par contre, si f est concave, un point où la dérivée s'annule est nécessairement un maximum global
- De plus, si f est strictement concave, un tel maximum global est aussi unique
- Sinon, que faire pour trouver un maximum global ?
 - Identifier tous les maxima locaux
 - Identifier celui de plus grande valeur
 - Vérifier que la fonction est bornée supérieurement (sinon, il n'y a pas de maximum global!)
- Problème : identifier tous les maxima locaux peut être difficile!!!

Méthode de la bisection

- On considère d'abord le cas le plus simple : la fonction objectif comporte **une seule variable**
- On suppose que f est concave
- On peut montrer alors que, si x^* est une solution optimale, il existe a et b tels que $a \leq x^* \leq b$ et

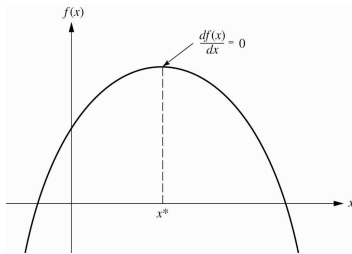
$$\frac{df(x)}{dx} > 0, \text{ si } x < a$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0, \text{ si } x = x^*$$

$$\frac{df(x)}{dx} < 0, \text{ si } x > b$$

Méthode de la bisection (suite)

Si f est strictement concave : $a = x^* = b$



7. Programmation non linéaire

25

Méthode de la bisection (suite)

- On fixe d'abord une borne inférieure x^i pour laquelle la dérivée en ce point est > 0
- On détermine également une borne supérieure x^s pour laquelle la dérivée en ce point est < 0
- Si les deux bornes ne sont pas suffisamment près l'une de l'autre, on prend le point milieu entre les deux bornes comme point candidat x^c
- Si la dérivée en x^c est ≥ 0 , on pose $x^i = x^c$
- Si la dérivée en x^c est ≤ 0 , on pose $x^s = x^c$
- On itère à nouveau tant que $x^s - x^i$ n'est pas suffisamment petit

7. Programmation non linéaire

26

Méthode de la bisection (suite)

- Identifier des bornes inférieure et supérieure initiales x^i et x^s
- Déterminer le point candidat : $x^c = (x^s + x^i) / 2$
- Si la dérivée en x^c est ≥ 0 : $x^i = x^c$
- Si la dérivée en x^c est ≤ 0 : $x^s = x^c$
- Si $x^s - x^i \leq 2\varepsilon$ (où ε est un nombre suffisamment petit), arrêter; sinon, retourner à l'étape 2

Exemple : $f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$

Exécuter l'algorithme avec [IOR Tutorial](#)

7. Programmation non linéaire

27

Méthode du gradient

- Considérons une fonction concave f de **plusieurs variables**

- Le gradient de f au point x' est défini ainsi :

$$\nabla f(x') = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \text{ en } x = x'$$

- On peut montrer que le gradient correspond à une direction d'augmentation de la valeur de f
- Dans la méthode du gradient, on se déplace dans la direction du gradient en tentant d'augmenter au maximum la valeur de l'objectif

7. Programmation non linéaire

28

Méthode du gradient (suite)

- À partir d'un point initial x' , on effectue un déplacement dans la direction du gradient vers un nouveau point x : $x = x' + t^* \nabla f(x')$
- Dans cette formule, t^* est la solution du problème de maximisation suivant :

$$\max_{t \geq 0} f(x' + t \nabla f(x'))$$

- C'est un problème de maximisation d'une fonction concave d'une seule variable : on peut donc le résoudre par la méthode de la bisection
- On pose $x' = x$ et on itère ainsi jusqu'à ce que le gradient s'annule (ou presque)

7. Programmation non linéaire

29

Méthode du gradient (suite)

- Déterminer une solution initiale x'
- Résoudre le problème suivant : $\max_{t \geq 0} f(x' + t \nabla f(x'))$
- Soit t^* la solution optimale : $x' = x' + t^* \nabla f(x')$
- Si $\left| \frac{\partial f(x')}{\partial x_j} \right| \leq \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots, n$, où ε est un nombre suffisamment petit, arrêter; sinon, retourner en 2

Exemple : $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$

Exécuter l'algorithme avec [IOR Tutorial](#)

7. Programmation non linéaire

30

Optimisation sous contraintes

- Dans le cas d'un modèle de programmation non linéaire sans contrainte, nous avons vu la condition d'optimalité suivante :

si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un maximum local, alors

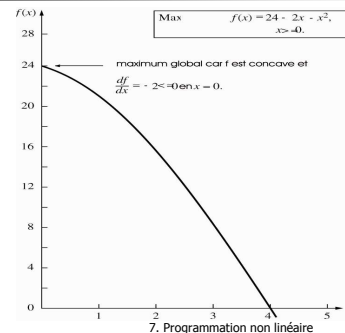
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n, \text{ en } x = x^*$$

- Cette condition n'est plus valable lorsqu'il y a des contraintes, car une solution optimale peut se trouver sur la frontière du domaine réalisable

7. Programmation non linéaire

31

Exemple avec contrainte $x \geq 0$



32

Conditions d'optimalité

- Avec une contrainte de la forme $x \geq 0$, les conditions d'optimalité s'énoncent ainsi :

si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un maximum local, alors

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \begin{cases} = 0 & \text{en } x = x^* \text{ si } x_j^* > 0 \\ \leq 0 & \text{en } x = x^* \text{ si } x_j^* = 0 \end{cases}$$

- Mais quelles sont ces conditions dans le cas général, où les contraintes sont de la forme :

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- Elles s'expriment en fonction des **multiplicateurs de Lagrange** u_i associés à chaque contrainte

Conditions KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

Si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un maximum local, alors il existe m nombres u_1, u_2, \dots, u_m tels que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \leq 0 \text{ en } x = x^*, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right) = 0 \text{ en } x = x^*, j = 1, 2, \dots, n$$

$$g_i(x^*) - b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_i (g_i(x^*) - b_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Conditions KKT : exemple

$$\max f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 1) + x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- D'abord, il est facile de vérifier que les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de non négativité doivent être nuls
- On peut donc considérer qu'il n'y a qu'une seule contrainte avec $g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ et $b_1 = 3$
- On associe à cette contrainte un multiplicateur $u_1 \geq 0$
- Outre les contraintes de non négativité, on a alors les conditions suivantes

Conditions KKT : exemple (suite)

$$\frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 \leq 0$$

$$1 - u_1 \leq 0$$

$$x_1^* \left(\frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 \right) = 0$$

$$x_2^* (1 - u_1) = 0$$

$$2x_1^* + x_2^* - 3 \leq 0$$

$$u_1 (2x_1^* + x_2^* - 3) = 0$$

- On obtient $u_1 \geq 1$
- Puisque $x_1^* \geq 0$, on en déduit $\frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 < 0$
- Donc $x_1^* = 0$



Conditions KKT : exemple (suite)

- Puisque $u_1 \neq 0$, on a $2x_1^* + x_2^* - 3 = 0$
- D'où $x_2^* = 3$
- Puisque $x_2^* \neq 0$, on déduit $u_1 = 1$
- Les conditions KKT sont donc satisfaites en un seul point : $(0,3)$
- Il s'agit bien d'un maximum global, car la fonction objectif est concave et le domaine réalisable est convexe (modèle de programmation convexe)