

3. Optimisation de réseaux

e. Flot à coût minimum



Problème du flot à coût minimum

- On a un graphe orienté et connexe
- A chaque arc (i,j) , on associe une capacité $u_{ij} > 0$ et un coût par unité de flot c_{ij}
- Il y a au moins une source et au moins un puits
- Tous les autres sont des sommets de transfert
- On cherche à minimiser le coût total encouru par le transport du flot des sources (sommets d'offre) vers les puits (sommets de demande)



Modèle de flot à coût minimum

- x_{ij} = flot sur l'arc (i,j)

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes:

$$\sum_{(i,j) \in A^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A^-(i)} x_{ji} = b_i \quad i \in V$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i,j) \in A$$

- $b_i = 0$ (transfert), offre (source), -demande (puits)
- V = ensemble des sommets ; A = ensemble des arcs
- $A^+(i)$ = ensemble des arcs sortant du sommet i
- $A^-(i)$ = ensemble des arcs entrant au sommet i



Cas particuliers

- *Problème de transport* (H&L, sec. 8.1-8.2)
 - Plusieurs sources et plusieurs puits
 - Aucun sommet de transfert
 - Uniquement des arcs entre une source et un puits
 - Aucune capacité ($u_{ij} = \infty$)
- *Problème d'affectation* (H&L, sec. 8.3-8.4)
 - Cas particulier du problème de transport
 - Autant de sources que de puits
 - On cherche à affecter chaque source à un seul puits, et vice-versa, de façon à minimiser le coût total des affectations
 - On pose $b_i = +1$ (source), -1 (puits)



Cas particuliers

- *Problème du plus court chemin*
 - Une source et un puits
 - Plusieurs sommets de transfert
 - On pose $b_i = +1$ (source), -1 (puits)
 - Aucune capacité ($u_{ij} = \infty$)

- *Problème du flot maximum*
 - $b_i = +F$ (source), $-F$ (puits), où $F >$ somme des capacités
 - Ajout d'un arc entre O et T: $c_{OT} = M$ et $u_{OT} = F$
 - Puisque $c_{ij} = 0$ sur tous les autres arcs, une solution optimale consiste à faire passer le maximum de flot entre O et T sans passer par l'arc (O,T)



Méthode du simplexe – réseau

- Flot à coût minimum : modèle de PL → simplexe
- Au lieu d'utiliser la méthode du simplexe basée sur l'élimination de Gauss-Jordan, on utilisera une adaptation qui effectue les pivots sur le réseau
- *Solution de base* : *arbre partiel* dans le graphe non orienté sous-jacent
- *Pivot*
 - **Variable d'entrée** : choisir un arc \notin à l'arbre partiel qui contribue le plus par unité à la diminution de l'objectif
 - L'ajout de cet arc crée un **cycle**
 - **Variable de sortie** : choisir l'arc du cycle dont l'élimination permet de retrouver une solution réalisable

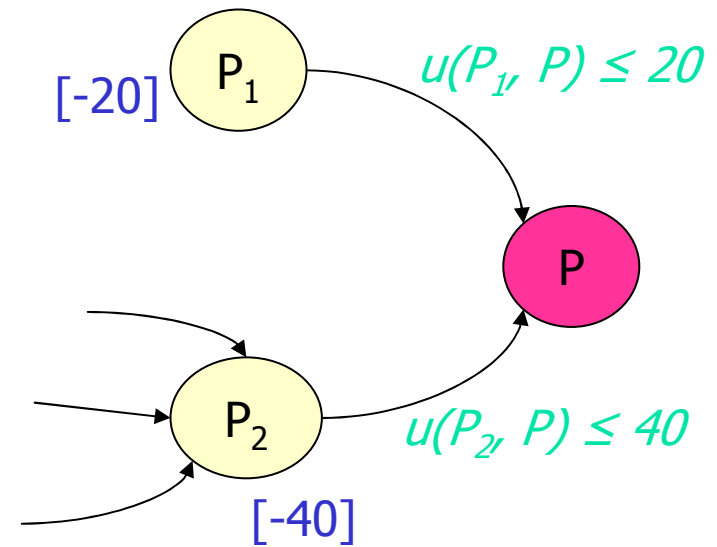
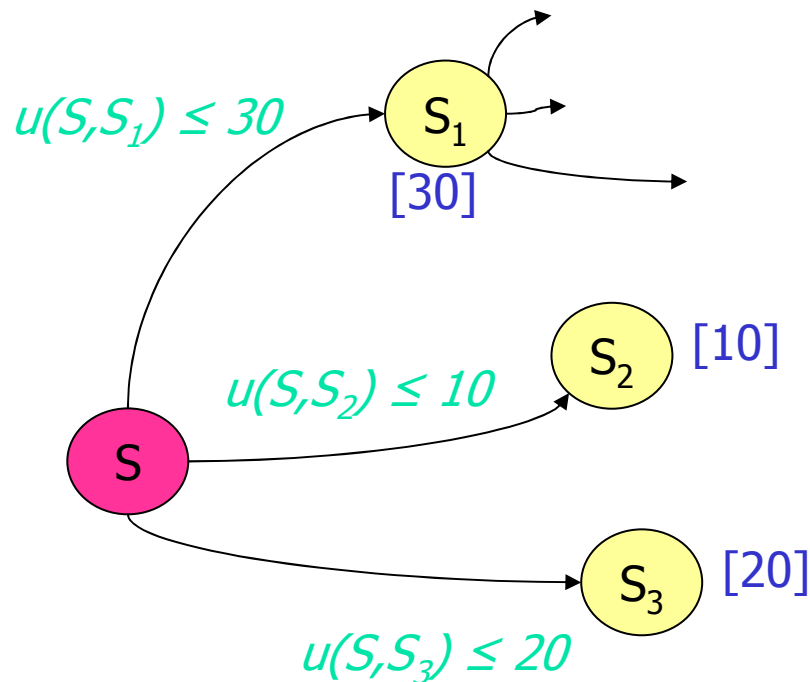


Contraintes de capacité

- On traitera les contraintes de capacité comme les contraintes de non négativité
- Interviennent dans le choix de la variable de sortie, lorsqu'on s'assure de générer une solution réalisable
- **Arc à pleine capacité** : pourra être considéré hors-base (à sa borne supérieure)
$$x_{ij} = u_{ij} \Leftrightarrow y_{ij} = u_{ij} - x_{ij} = 0$$
- Augmenter la variable hors-base y_{ij} :
 - Diminuer le flot sur (i,j) , ce qui diminue le coût de c_{ij}
 - Augmenter le flot en sens inverse, sur (j,i) , ce qui « augmente » le coût de $-c_{ij}$
- **Arc (i,j) hors-base à pleine capacité** : remplacer (i,j) par (j,i) de coût $-c_{ij}$

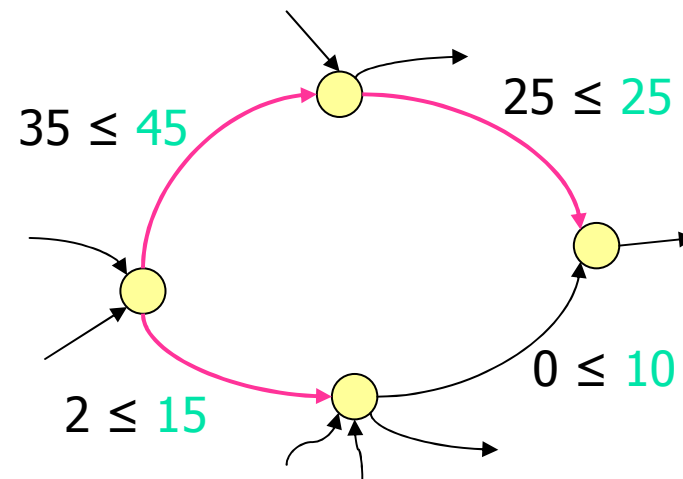
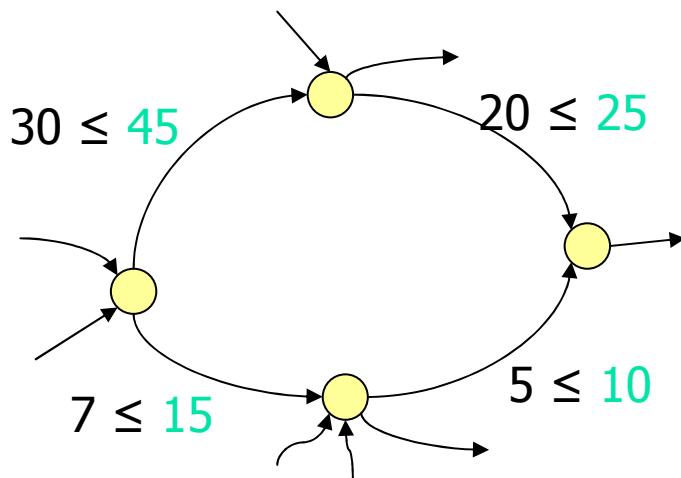
Solution de base réalisable initiale

- On peut résoudre un problème de *flot maximum* sur le réseau suivant :
 - On ajoute une *super-source* reliée à chacune des sources par un arc de capacité égale à l'offre à la source
 - On ajoute un *super-puits* relié à chacun des puits par un arc de capacité égale à la demande au puits



Solution de base réalisable initiale

- Une fois ce problème résolu, on construit une solution de base réalisable initiale (un arbre partiel) :
 - Tous les arcs à flot non nul et inférieur à la capacité sont inclus dans l'arbre partiel
 - Si l'arbre partiel est incomplet, on ajoute (arbitrairement) des arcs à flot nul ou à pleine capacité



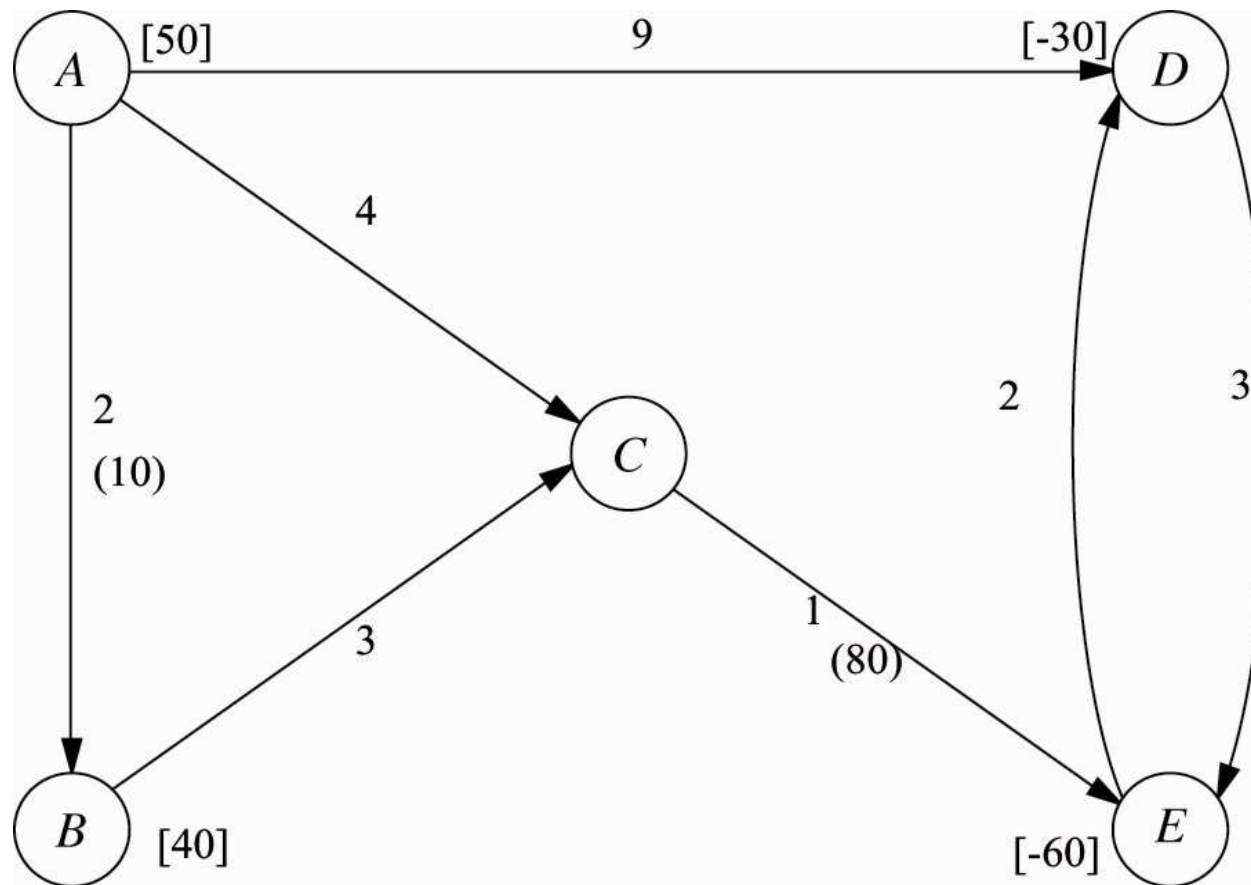


Simplexe – réseau : résumé

1. Obtenir un arbre partiel initial
2. Critère d'optimalité: si aucun arc \notin à l'arbre partiel ne peut faire diminuer la valeur de l'objectif, arrêter
3. Choisir l'arc (i,j) pour lequel une augmentation de 1 unité de flot fait le plus diminuer l'objectif
4. Identifier le cycle créé par l'ajout de (i,j) , ainsi que l'arc (p,q) du cycle qui doit être enlevé afin de demeurer dans le domaine réalisable
5. Ajouter (i,j) et enlever (p,q) pour obtenir un nouvel arbre partiel; retourner à l'étape 2

Voir l'exemple dans le [OR Tutor](#)

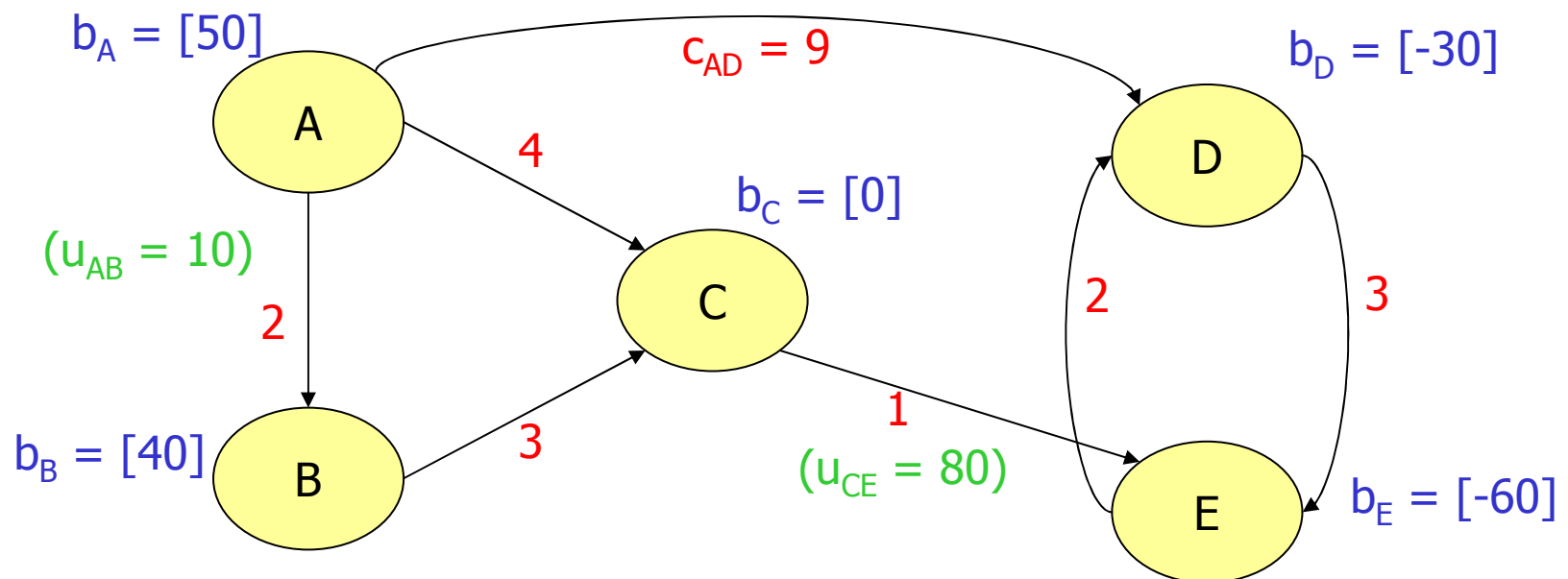
Simplexe – réseau : exemple



$$\min Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED}$$

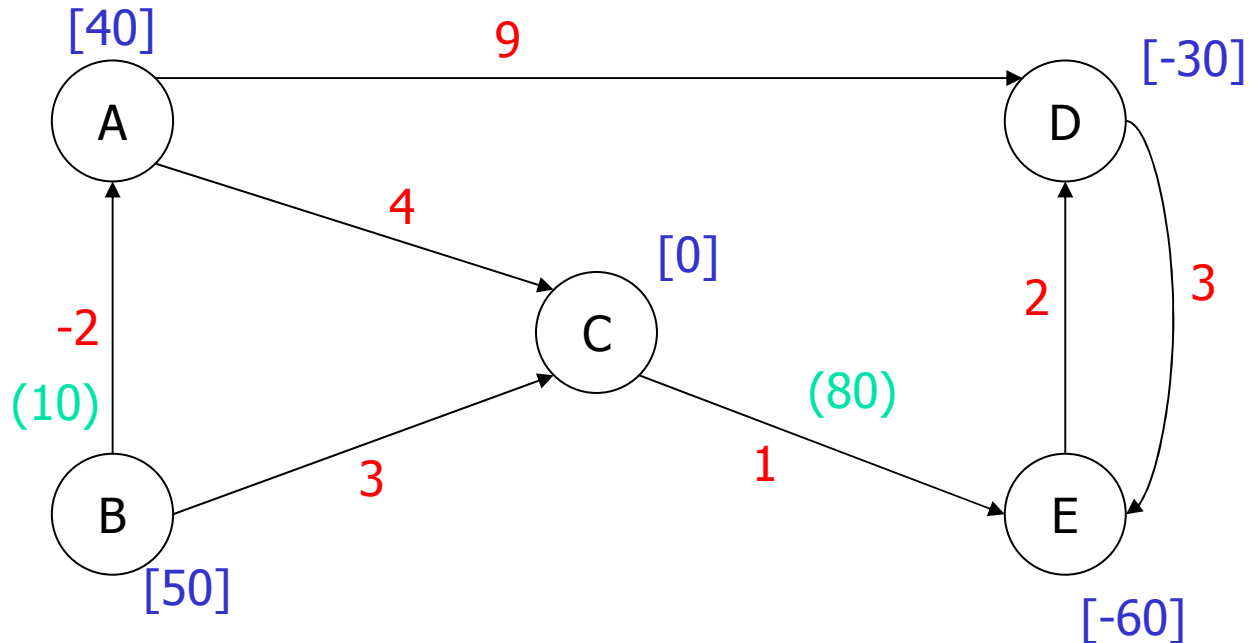
sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} &= 50 \\ -x_{AB} + x_{BC} &= 40 \\ -x_{AC} - x_{BC} + x_{CE} &= 0 \\ -x_{AD} + x_{DE} - x_{ED} &= -30 \\ -x_{CE} - x_{DE} + x_{ED} &= -60 \\ x_{AB} \leq u_{AB} = 10 & \quad x_{CE} \leq u_{CE} = 80 \quad x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$



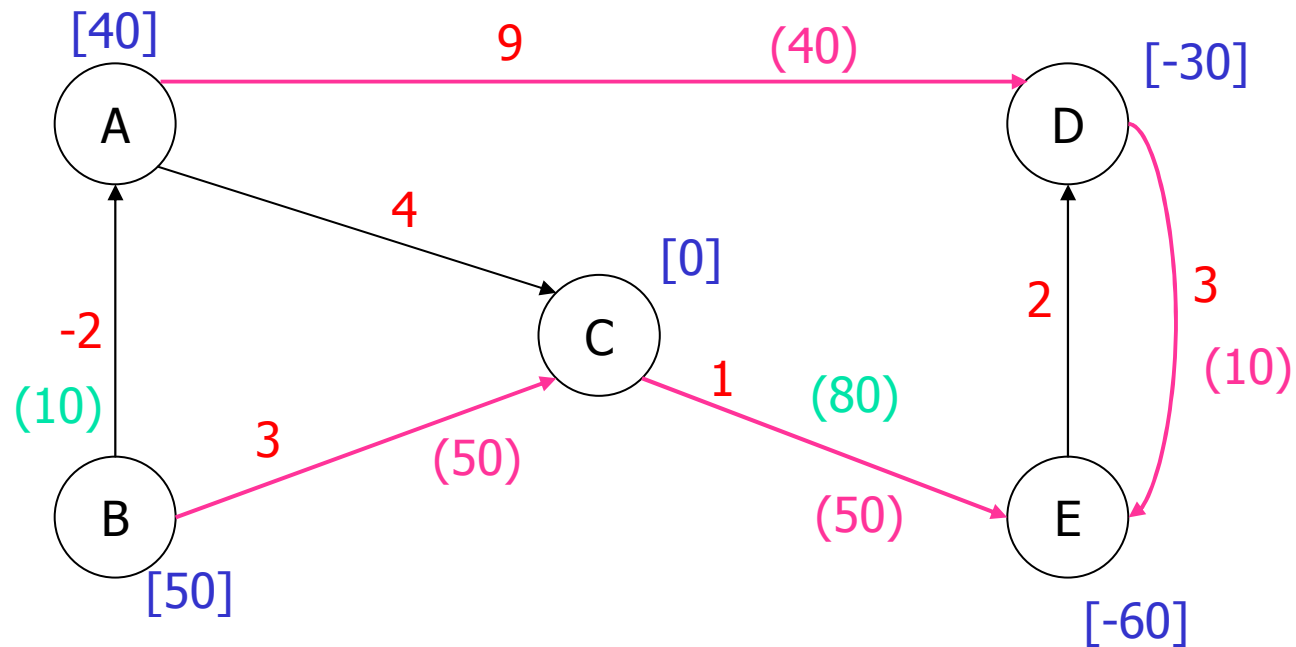
Exemple (suite)

- Supposons que dans la solution initiale, l'arc (A,B) est à capacité et hors-base
- On introduit alors l'arc (B,A) de coût -2



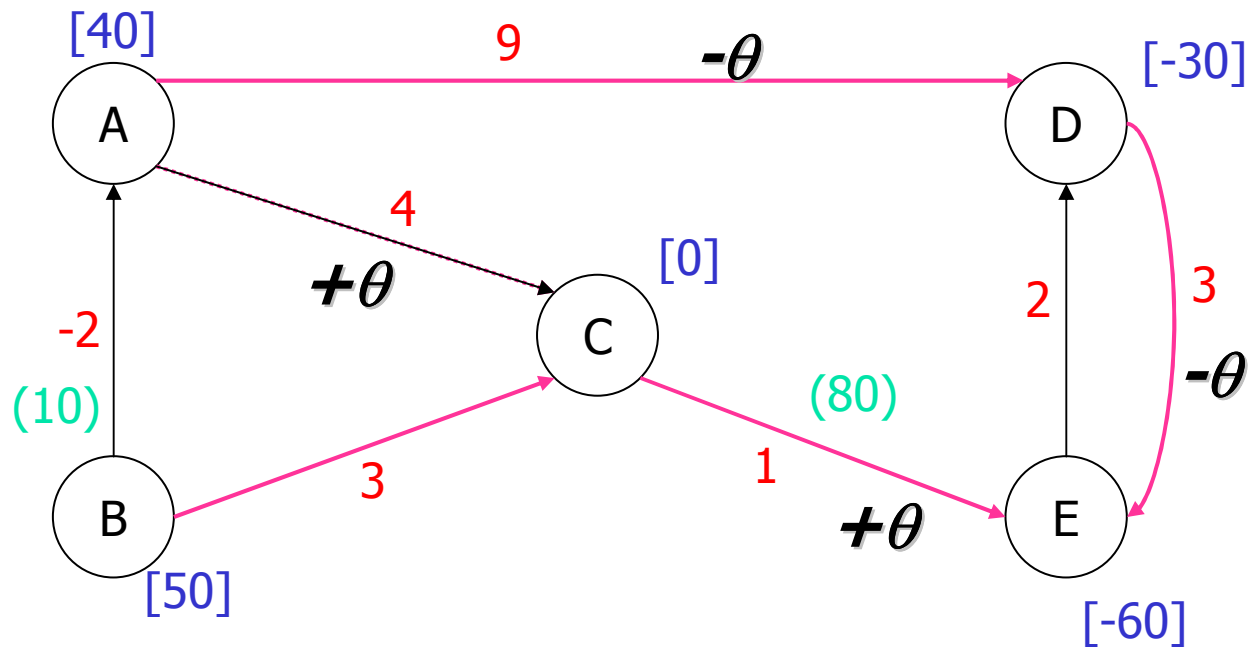
Exemple (suite)

- Arbre partiel initial (le flot est entre parenthèses)



Exemple (suite)

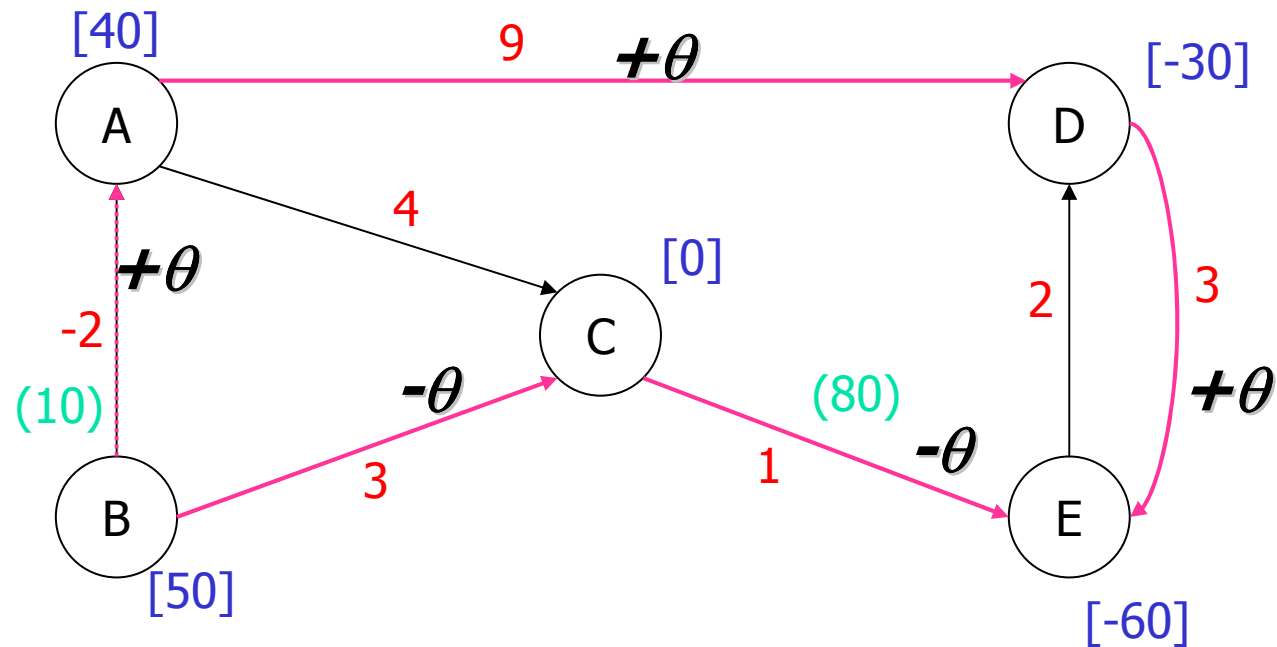
- Essai 1: ajout de l'arc (A,C)



$$\Delta Z = 4\theta + \theta - 3\theta - 9\theta = -7\theta$$

Exemple (suite)

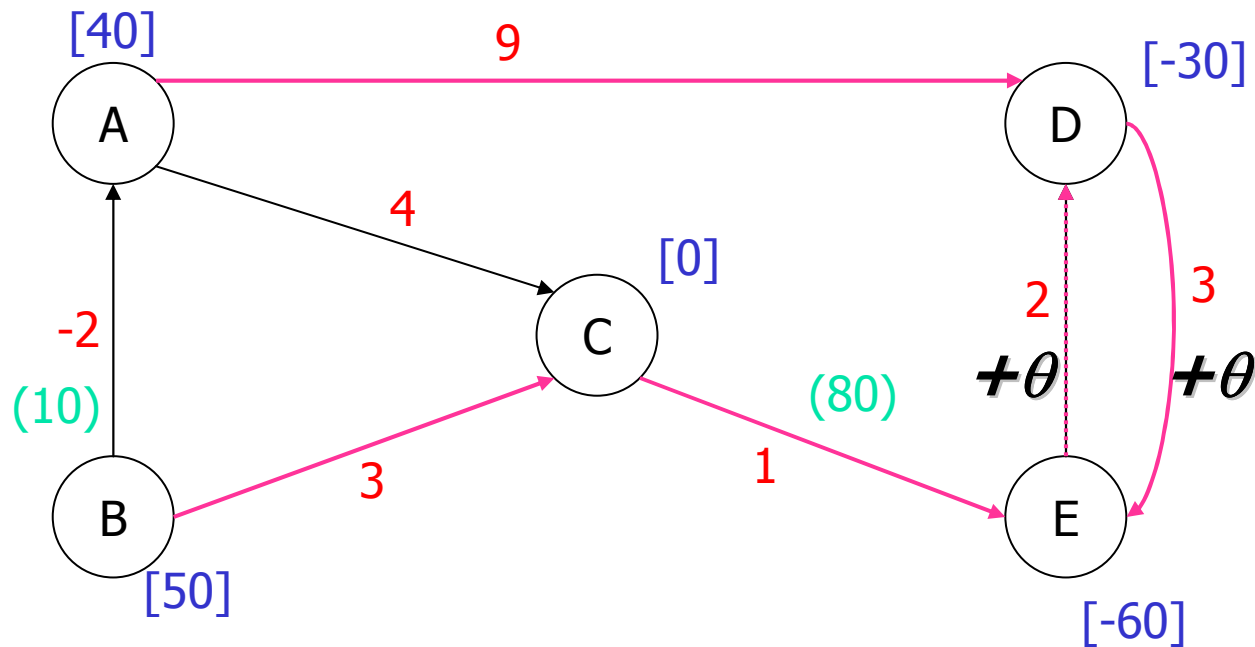
- Essai 2: ajout de l'arc (B,A)



$$\Delta Z = -2\theta + 9\theta + 3\theta - \theta - 3\theta = 6\theta$$

Exemple (suite)

- Essai 3: ajout de l'arc (E,D)



$$\Delta Z = +2\theta + 3\theta = 5\theta$$



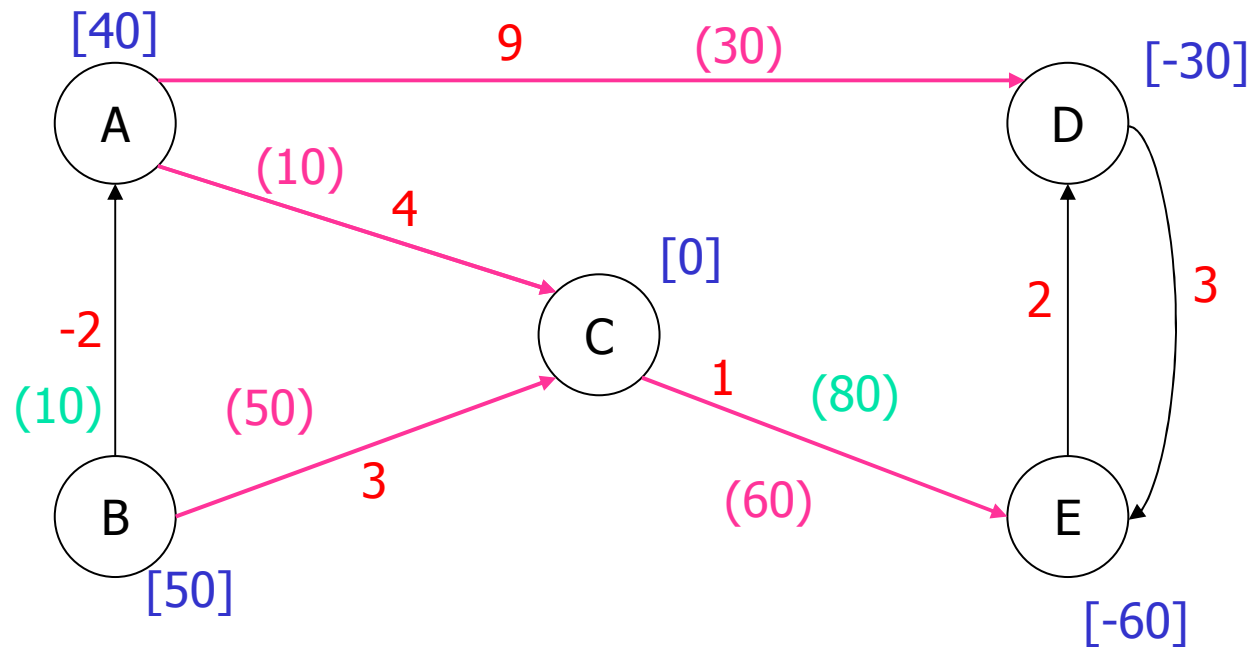
Exemple (suite)

- On ajoute donc l'arc (A,C) puisque c'est le seul pour lequel l'objectif diminue
- Le cycle formé par l'ajout est constitué des arcs
 - (A,C) : on peut augmenter le flot indéfiniment, puisque sa capacité est infinie
 - (C,E) : on peut augmenter le flot (50) jusqu'à la capacité 80
 - (D,E) : on peut diminuer le flot (10) jusqu'à 0
 - (A,D) : on peut diminuer le flot (40) jusqu'à 0
- L'augmentation maximum sur le cycle est donc 10 :

$$x_{AC} = 10, \quad x_{CE} = 60, \quad x_{DE} = 0, \quad x_{AD} = 30$$

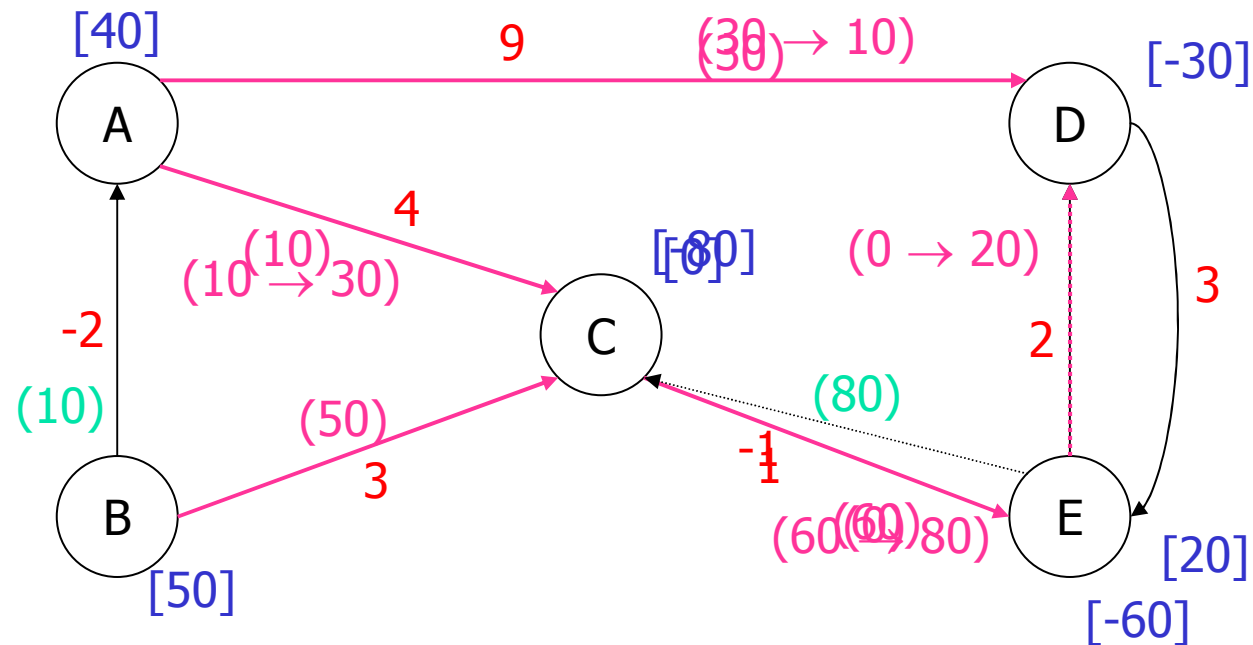
Exemple (suite)

- On enlève donc l'arc (D,E) pour obtenir un nouvel arbre partiel



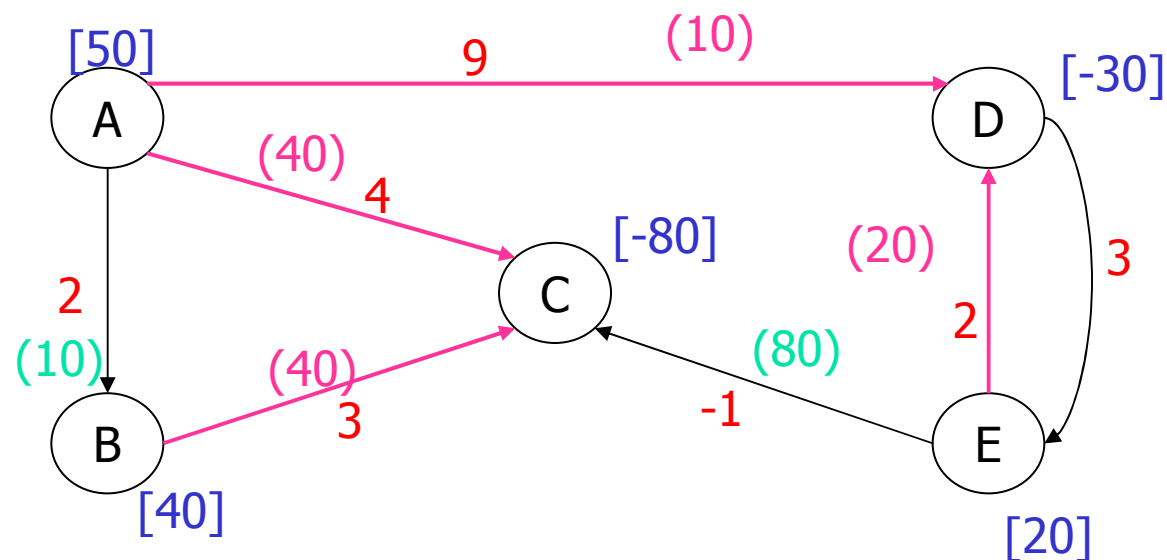
Exemple (suite)

- Lors de la prochaine itération :
 - L'arc (E,D) est ajouté
 - On ajuste les valeurs des flots
 - L'arc (C,E) est enlevé, car il atteint sa capacité
 - On doit donc introduire un arc (E,C) de coût -1



Exemple (suite)

- Lors de la prochaine itération :
 - L'arc (A,B) est ajouté
 - L'arc (B,A) est enlevé, car il atteint sa capacité!
 - On doit donc introduire un arc (A,B) de coût $-(-2)=2$
 - Ce pivot correspond à vider le flot sur (A,B)



Exemple (suite et fin)

- Lors de la prochaine itération, aucun arc ne peut être ajouté de façon à diminuer l'objectif : la solution est optimale

