

1. 10-4.1, p. 477

Étape $n =$ partie $n, n = 1, 2, 3$

État $s_n =$ montant détenu par le joueur au début de la partie n

Décision $x_n =$ montant à parier au début de la partie n

$f_n(s_n, x_n) =$ probabilité que le joueur détienne *exactement* 100 \$ à la fin des 3 parties, étant donné qu'il détient s_n \$ au début de la partie n , qu'il parie x_n \$ lors de la partie n , et qu'il effectue des décisions optimales pour les étapes $n+1, \dots, N = 3$

$$f_n^*(s_n) = \max\{f_n(s_n, x_n) \mid s_n \geq 0\}$$

Calculons d'abord x_3^* et $f_3^*(s_3)$

$$0 \leq s_3 < 50 \Rightarrow f_3(s_3, x_3) = 0, 0 \leq x_3 < 50$$

$$50 \leq s_3 < 100 \Rightarrow f_3(s_3, x_3) = \begin{cases} 0, x_3 \neq 100 - s_3 \\ 1/2, x_3 = 100 - s_3 \end{cases}$$

$$s_3 = 100 \Rightarrow f_3(s_3, x_3) = \begin{cases} 0, x_3 > 0 \\ 1, x_3 = 0 \end{cases}$$

$$s_3 > 100 \Rightarrow f_3(s_3, x_3) = \begin{cases} 0, x_3 \neq s_3 - 100 \\ 1/2, x_3 = s_3 - 100 \end{cases}$$

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
$0 \leq s_3 < 50$	0	$0 \leq x_3^* < 50$
$50 \leq s_3 < 100$	1/2	$100 - s_3$
100	1	0
$s_3 > 100$	1/2	$s_3 - 100$

Calculons maintenant x_2^* et $f_2^*(s_2)$

$$f_2^*(s_2) = \max\{(1/2) \cdot f_3^*(s_2 - x_2) + (1/2) \cdot f_3^*(s_2 + x_2) \mid 0 \leq x_2 \leq s_2\}$$

s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$0 \leq s_2 < 25$	0	$0 \leq x_2^* < 25$
$25 \leq s_2 < 50$	1/4	$50 - s_2 \leq x_2^* \leq s_2$
$50 \leq s_2 < 75$	1/2	$0 \leq x_2^* \leq s_2 - 50$ $x_2^* = 100 - s_2$
$s_2 = 75$	3/4	$x_2^* = 25$
$75 < s_2 < 100$	3/4	$x_2^* = 100 - s_2$
$s_2 = 100$	1	$x_2^* = 0$
$s_2 > 100$	3/4	$x_2^* = s_2 - 100$

Calculons enfin x_1^* et $f_1^*(75)$

$$f_1^*(75) = \max\{(1/2) \cdot f_2^*(75 - x_1) + (1/2) \cdot f_2^*(75 + x_1) \mid 0 \leq x_1 \leq 75\} = 3/4, \text{ si } x_1^* = 0 \text{ ou } 25$$

Voici les politiques optimales :

1) $x_1^* = 0$

- Peu importe le résultat, on a $s_2 = 75$: $x_2^* = 25$
 - Si on gagne ($s_3 = 100$), $x_3^* = 0$
 - Si on perd ($s_3 = 50$), $x_3^* = 50$

2) $x_1^* = 25$

- Si on gagne ($s_2 = 100$), $x_2^* = 0$ et $x_3^* = 0$ (on a gagné)
- Si on perd ($s_2 = 50$), $x_2^* = 0$ ou 50
 - a) $x_2^* = 0$
 - Peu importe le résultat, on a $s_3 = 50$: $x_3^* = 50$
 - b) $x_2^* = 50$
 - Si on gagne ($s_3 = 100$) : $x_3^* = 0$
 - Si on perd ($s_3 = 0$) et on a perdu

2. 12.2-5, p. 604

a. $\frac{df}{dx} = 48 - 120x + 3x^2 = 0 \Rightarrow x = (120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48}) / (2 \cdot 3) = 0,4041$ ou $39,596$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -120 + 6x$$

$$\frac{d^2f(0,4041)}{dx^2} = -120 + 6 \cdot (0,4041) < 0 \Rightarrow f(0,4041) = 9,665 \text{ correspond à un maximum local}$$

$$\frac{d^2f(39,596)}{dx^2} = -120 + 6 \cdot (39,596) > 0 \Rightarrow f(39,596) = -30089,665 \text{ correspond à un minimum local}$$

b. $x > 39,596 \Rightarrow \frac{df}{dx} > 0$ et $\frac{d^2f}{dx^2} > 0 \Rightarrow f$ n'est pas bornée supérieurement

$$x < 0,4041 \Rightarrow \frac{df}{dx} > 0 \text{ et } \frac{d^2f}{dx^2} < 0 \Rightarrow f \text{ n'est pas bornée inférieurement}$$

3. 12.2-8, p. 605

Posons $f = f_1 + f_2 + f_{34} + f_{56} + f_{67}$

$$f_1(x_1) = 5x_1$$

$$f_2(x_2) = 2x_2^2$$

$$f_{34}(x_3, x_4) = x_3^2 - 3x_3x_4 + 4x_4^2$$

$$f_{56}(x_5, x_6) = 2x_5^4 + x_5^2 + 3x_5x_6 + 3x_6^2$$

$$f_{67}(x_6, x_7) = 3x_6^2 + 3x_6x_7 + x_7^2$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx_1^2} = 0 \Rightarrow f_1 \text{ est convexe}$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx_2^2} = 4 > 0 \Rightarrow f_2 \text{ est convexe}$$

$$\frac{\partial^2 f_{34}}{\partial x_3^2} = 2 > 0, \frac{\partial^2 f_{34}}{\partial x_4^2} = 8 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f_{34}}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 f_{34}}{\partial x_4^2} - \left[\frac{\partial^2 f_{34}}{\partial x_3 \partial x_4} \right]^2 = 16 - (-3)^2 > 0 \Rightarrow f_{34} \text{ est convexe}$$

$$\frac{\partial^2 f_{56}}{\partial x_5^2} = 24x_5^2 + 2 > 0, \frac{\partial^2 f_{56}}{\partial x_6^2} = 6 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f_{56}}{\partial x_5^2} \frac{\partial^2 f_{56}}{\partial x_6^2} - \left[\frac{\partial^2 f_{56}}{\partial x_5 \partial x_6} \right]^2 = (24x_5^2 + 2)6 - (3)^2 > 0 \Rightarrow f_{56} \text{ est}$$

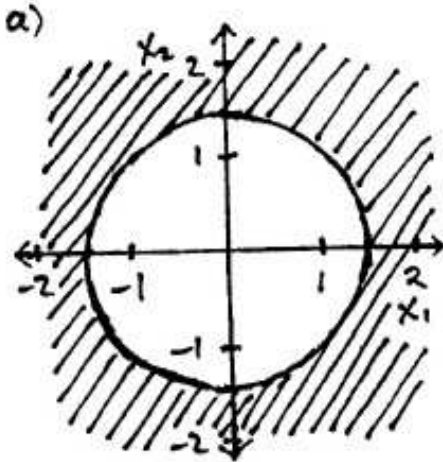
convexe

$$\frac{\partial^2 f_{67}}{\partial x_6^2} = 6 > 0, \frac{\partial^2 f_{67}}{\partial x_7^2} = 2 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f_{67}}{\partial x_6^2} \frac{\partial^2 f_{67}}{\partial x_7^2} - \left[\frac{\partial^2 f_{67}}{\partial x_6 \partial x_7} \right]^2 = 12 - 3^2 > 0 \Rightarrow f_{67} \text{ est convexe}$$

Puisque f est la somme de fonctions convexes, elle est convexe.

4. 12.2-10, p. 605

a. Voici une représentation graphique du domaine réalisable :



Le domaine hachuré n'est pas convexe. Pour le démontrer, il suffit d'exhiber deux points du domaine tels que le segment de droite joignant ces deux points ne se situe pas entièrement dans le domaine. Par exemple, le segment de droite joignant les points $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$ ne se trouve pas dans le domaine.

b. Supposons que le domaine réalisable peut être représenté ainsi : $\{x \mid f(x) \leq b\}$. On peut alors montrer que si f est convexe, alors le domaine réalisable est convexe. Ici, le domaine réalisable s'écrit ainsi : $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \leq -2\}$. En posant $f = f_1 + f_2$, où $f_1(x_1) = -x_1^2$ et $f_2(x_2) = -x_2^2$, on montre que f est une fonction concave, puisque : 1) f_1 est concave car $\frac{d^2 f_1}{dx_1^2} = -2 < 0$; 2) f_2 est

concave car $\frac{d^2 f_2}{dx_2^2} = -2 < 0$; 3) la somme de fonctions concaves est concave. On ne peut donc pas

conclure que le domaine est convexe. Pour démontrer que le domaine est non convexe, il suffit d'exhiber deux points du domaine tels que le segment de droite joignant ces deux points n'est pas entièrement dans le domaine (voir a). Moralité : les tests de convexité au moyen du calcul différentiel sont utiles pour démontrer qu'un ensemble est convexe, mais pas pour démontrer qu'un ensemble est non convexe!

5. **12.4-7, p. 606**

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

$$f_1(x_1) = 32x_1 - x_1^4$$

$$f_2(x_2) = 50x_2 - 10x_2^2 + x_2^3 - x_2^4$$

$$\frac{df_1(x_1)}{dx_1} = 32 - 4x_1^3 \Rightarrow x_1^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$$

Voici le tableau des itérations de la méthode de bisection pour la maximisation de f_2 :

Max f(x) = 50 x - 10 x² + 1 x³ - 1 x⁴
df(x)/dx = 50 - 20 x + 3 x² - 4 x³
lower bound : 0 upper bound : 4

Iteration	x-	x+	New x'	f(x')	df(x)/d(x)
0	0	4	2	52	-10
1	0	2	1	40	29
2	1	2	1,5	50,8125	13,25
3	1,5	2	1,75	52,8555	2,75
4	1,75	2	1,875	52,8259	-3,3203
5	1,75	1,875	1,8125	52,9355	-0,2119
6	1,75	1,8125	1,7812	52,9186	1,287
7	1,7812	1,8125	1,7969	52,9329	0,5421
8	1,7969	1,8125	1,8047	52,9357	0,1662
9	1,8047	1,8125	1,8086	52,936	-0,0226
10	1,8047	1,8086	1,8066	52,9359	0,0719
11	1,8066	1,8086	1,8076	52,936	0,0247

La solution optimale (approximative) est : $x_2 = 1,8076$.

Vérifions que les contraintes sont satisfaites au point (2, 1,8076) :

$$3x_1 + x_2 = 7,8076 < 11$$

$$2x_1 + 5x_2 = 13,038 < 16$$

Puisque la solution optimale du problème sans contrainte est à l'intérieur du domaine réalisable du problème avec contraintes, cette solution est aussi optimale pour ce dernier problème.