

1. 12.5-4, p. 607

Voici le tableau obtenu après deux itérations de la méthode du gradient :

Current Trial Solution : (x1, x2) = (1,6 , 0,8)

Max f(X) = $6 x_1 + 2 x_1 x_2 - 2 x_2 - 2 x_1^2 - 1 x_2^2$

df(X)/dx1 = $6 + 2 x_2 - 4 x_1$ = 1,2

df(X)/dx2 = $+ 2 x_1 - 2 - 2 x_2$ = -0,4

Iter.	X'	grad f(X')	X'+t[grad f(X')	t*	X'+t*[grad f(X')
1	(0, 0)	(6, -2)	(0+6t, 0-2t)	0,2	(1,2, -0,4)
2	(1,2, -0,4)	(0,4, 1,2)	(1,2+0,4t, -0,4+1,2t)	1	(1,6, 0,8)
3	(1,6, 0,8)	(1,2, -0,4)	(0+0t, 0+0t)	0	(0, 0)

Voici ce qu'on obtient après quelques itérations additionnelles :

Current Trial Solution : (x1, x2) = (1,994 , 0,989)

Max f(X) = $6 x_1 + 2 x_1 x_2 - 2 x_2 - 2 x_1^2 - 1 x_2^2$

df(X)/dx1 = $6 + 2 x_2 - 4 x_1$ = 0,003

df(X)/dx2 = $+ 2 x_1 - 2 - 2 x_2$ = 0,01

Iter.	X'	grad f(X')	X'+t[grad f(X')	t*	X'+t*[grad f(X')
1	(0, 0)	(6, -2)	(0+6t, 0-2t)	0,2	(1,2, -0,4)
2	(1,2, -0,4)	(0,4, 1,2)	(1,2+0,4t, -0,4+1,2t)	1	(1,6, 0,8)
3	(1,6, 0,8)	(1,2, -0,4)	(1,6+1,2t, 0,8-0,4t)	0,2	(1,84, 0,72)
4	(1,84, 0,72)	(0,08, 0,24)	(1,84+0,08t, 0,72+0,24t)	1	(1,92, 0,96)
5	(1,92, 0,96)	(0,24, -0,08)	(1,92+0,24t, 0,96-0,08t)	0,2	(1,968, 0,944)
6	(1,968, 0,944)	(0,016, 0,048)	(1,968+0,016t, 0,944+0,048t)	1	(1,984, 0,992)
7	(1,984, 0,992)	(0,048, -0,016)	(1,984+0,048t, 0,992-0,016t)	0,2	(1,994, 0,989)
8	(1,994, 0,989)	(0,003, 0,01)	(1,994+0,003t, 0,989+0,01t)	0,914	(1,997, 0,998)

Voici ce qu'on obtient en appliquant la procédure automatique avec une tolérance de 0,001 :

Initial Trial Solution : (x1 , x2) = (0 , 0)

The Solution is : (x1 , x2) = (1,994 , 0,989)

grad f(x1, x2) = (0,003 , 0,01)

Error Tolerance is : 0,01

Résolvons maintenant de manière exacte en identifiant le(s) point(s) où le gradient s'annule :

$$\nabla f(x_1, x_2) = (6 + 2x_2 - 4x_1, 2x_1 - 2 - 2x_2) = (0,0) \Rightarrow x_1 = 1 + x_2 \Rightarrow 6 + 2x_2 - 4(1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 2$$

La solution optimale est donc (2,1).

2. 12.6-4, p. 607

a. Voici les conditions KKT :

$$24 - 2x_1 - u_1 \leq 0$$

$$10 - 2x_2 - u_2 \leq 0$$

$$x_1(24 - 2x_1 - u_1) = 0$$

$$x_2(10 - 2x_2 - u_2) = 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 8$$

$$0 \leq x_2 \leq 7$$

$$u_1(x_1 - 8) = 0$$

$$u_2(x_2 - 7) = 0$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

Si $u_1 = 0$, alors on doit avoir $x_1 = 0$ ou $24 - 2x_1 = 0$. Dans le premier cas, on ne satisfait pas la première contrainte, alors que dans le deuxième cas, on doit avoir $x_1 = 12$, qui n'est pas réalisable. On en déduit donc que $u_1 > 0$, ce qui implique $x_1 = 8$, et on doit nécessairement avoir $u_1 = 8$.

Si $u_2 = 0$, alors on doit avoir $x_2 = 0$ ou $10 - 2x_2 = 0$. Dans le premier cas, on ne satisfait pas la deuxième contrainte, mais dans le deuxième cas, on doit avoir $x_2 = 5$, qui est réalisable et satisfait donc toutes les contraintes.

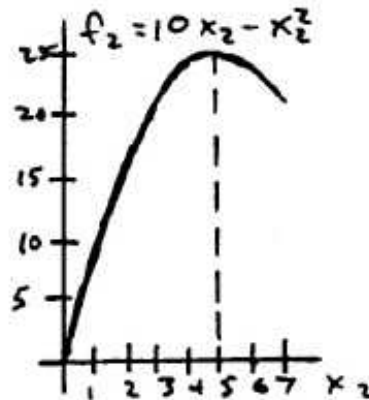
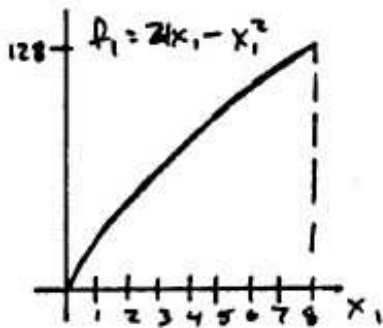
Puisqu'il s'agit d'un modèle de programmation convexe, la solution optimale est le point (8,5), les multiplicateurs de Lagrange étant $u_1 = 8$ et $u_2 = 0$.

b. La décomposition en deux fonctions donne :

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

$$f_1(x_1) = 24x_1 - x_1^2$$

$$f_2(x_2) = 10x_2 - x_2^2$$



$\frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} = 24 - 2x_1 > 0$, $0 \leq x_1 \leq 8 \Rightarrow x_1 = 8$ est le maximum, la fonction étant concave sur cet intervalle, car la dérivée seconde est $-2 < 0$

$\frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} = 10 - 2x_2 = 0$, si $x_2 = 5$, qui correspond au maximum, la fonction étant concave sur cet intervalle, car la dérivée seconde est $-2 < 0$

3. 12.6-15, p. 609

Les conditions KKT sont :

$$-4x_1^3 + 2ux_1 \leq 0$$

$$-4x_2 + 2ux_2 \leq 0$$

$$x_1(-4x_1^3 + 2ux_1) = 0$$

$$x_2(-4x_2 + 2ux_2) = 0$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 2 \leq 0$$

$$u(-x_1^2 - x_2^2 + 2) = 0$$

$$u \geq 0$$

Si $x_1 = x_2 = 1$, alors on doit avoir $-4 + 2u = 0$, d'où $u = 2$, et toutes les conditions KKT sont satisfaites. Donc, $(1,1)$ peut être une solution optimale.

4. 12.6-16, p. 609

Les conditions KKT sont :

$$32 - 4x_1^3 - 3u_1 - 2u_2 \leq 0$$

$$50 - 20x_2 + 3x_2^2 - 4x_2^3 - u_1 - 5u_2 \leq 0$$

$$x_1(32 - 4x_1^3 - 3u_1 - 2u_2) = 0$$

$$x_2(50 - 20x_2 + 3x_2^2 - 4x_2^3 - u_1 - 5u_2) = 0$$

$$3x_1 + x_2 - 11 \leq 0$$

$$2x_1 + 5x_2 - 16 \leq 0$$

$$u_1(3x_1 + x_2 - 11) = 0$$

$$u_2(2x_1 + 5x_2 - 16) = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

Si $x_1 = x_2 = 2$, alors on doit avoir $u_1 = u_2 = 0$, mais alors $50 - 20x_2 + 3x_2^2 - 4x_2^3 = -10$ et la condition $x_2(50 - 20x_2 + 3x_2^2 - 4x_2^3 - u_1 - 5u_2) = 0$ n'est pas satisfaite. $(2,2)$ ne peut donc pas être une solution optimale.

5. **13.1-3, p. 655**

a. Voici les tours possibles avec la distance totale pour chacun :

1-2-3-4-5-6-1	64
1-2-3-4-6-5-1	59
1-2-3-6-4-5-1	67
1-2-4-3-6-5-1	64
1-2-5-4-3-6-1	67
1-2-6-3-4-5-1	69
1-5-4-3-2-6-1	63
1-5-2-3-4-6-1	56
1-5-2-4-3-6-1	61
1-5-4-2-3-6-1	66

La solution optimale est : 1-5-2-3-4-6-1 (distance totale : 56).

b. Solution initiale : 1-2-3-4-5-6-1 (64)

Inversions de sous-tours :

- 1-5-4-3-2-6-1 (63)
- 1-2-5-4-3-6-1 (67)
- 1-2-3-4-6-5-1 (59)

Nouvelle solution : 1-2-3-4-6-5-1 (59)

Inversions de sous-tours :

- 1-6-4-3-2-5-1 (56)
- 1-2-4-3-6-5-1 (64)
- 1-2-3-6-4-5-1 (67)
- 1-2-3-4-5-6-1 (64)

Nouvelle solution : 1-6-4-3-2-5-1 (56)

Inversions de sous-tours :

- 1-2-3-4-6-5-1 (59)
- 1-6-2-3-4-5-1 (63)
- 1-6-3-4-2-5-1 (61)

Aucune amélioration : l'algorithme s'arrête

c. Solution initiale : 1-2-5-4-3-6-1 (67)

Inversions de sous-tours :

- 1-5-2-4-3-6-1 (61)
- 1-2-6-3-4-5-1 (69)
- 1-2-3-4-5-6-1 (64)

Nouvelle solution : 1-5-2-4-3-6-1 (61)

Inversions de sous-tours :

- 1-2-5-4-3-6-1 (67)
- 1-5-4-2-3-6-1 (66)
- 1-5-2-3-4-6-1 (56)

Nouvelle solution : 1-5-2-3-4-6-1 (56)

Inversions de sous-tours :

- 1-2-3-4-6-5-1 (59)
- 1-6-2-3-4-5-1 (63)
- 1-6-3-4-2-5-1 (61)

Aucune amélioration : l'algorithme s'arrête

6. **13.3-1, p. 656**

- a. Solution voisine 1 (29) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(29-30)/2} = e^{-1/2} = 0,607$
 Solution voisine 2 (34) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = 1$
 Solution voisine 3 (31) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = 1$
 Solution voisine 1 (24) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(24-30)/2} = e^{-3} = 0,050$
- b. Solution voisine 1 (29) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = 1$
 Solution voisine 2 (34) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(30-34)/2} = e^{-2} = 0,135$
 Solution voisine 3 (31) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(30-31)/2} = e^{-1/2} = 0,607$
 Solution voisine 1 (24) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = 1$

7. **13.3-7, p. 657**

a. $f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x + 100$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 120x + 900$$

$$\frac{d^2f(x)}{d^2x} = 6x - 120$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 3 \cdot 900}}{6} \Leftrightarrow x = 10 \text{ ou } 30$$

$$\frac{d^2f(10)}{d^2x} = 6 \cdot 10 - 120 = -60 \Rightarrow x = 10 \text{ est un maximum local}$$

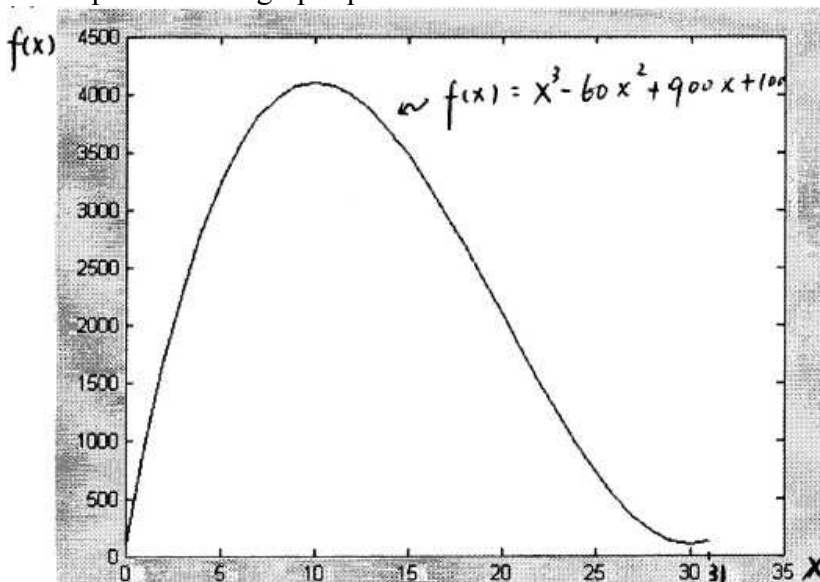
$$\frac{d^2f(30)}{d^2x} = 6 \cdot 30 - 120 = 60 \Rightarrow x = 30 \text{ est un minimum local}$$

Aux frontières du domaine réalisable ($x = 0$ ou 31) :

$x = 0$ est un minimum local, car $f(0) \leq f(x)$, $0 \leq x \leq 10$

$x = 31$ est un maximum local, car $f(31) \geq f(x)$, $30 \leq x \leq 31$

b. Voici une représentation graphique du domaine réalisable :



- c. L'idée de l'algorithme de la section 13.3 est (à partir du point courant) de déterminer un point candidat x en suivant une loi de probabilité *normale* de moyenne 0 et d'écart-type égal à $(U-L)/6$, où U et L sont les bornes supérieure et inférieure qui définissent le domaine réalisable. Ici, $U = 31$ et $L = 0$, ce qui veut dire qu'on suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type $31/6 = 5,167$, notée $N(0;5,167)$.

Le premier nombre aléatoire du tableau 20.3 est 0,09656. Selon le tableau de l'annexe 5 : $P(N(0;1) \leq -1,315) \approx 0,09656$, ce qui implique que $P(N(0;5,167) \leq -1,315 \cdot 5,167) \approx 0,09656$, ou $P(N(0;5,167) \leq -6,79) \approx 0,09656$. À partir de la solution initiale $x = 15,5$, on choisit donc le point candidat $x = 15,5 - 6,79 = 8,71$.

Pour déterminer si on se déplace ou non vers le point candidat, on effectue les calculs suivants :

$$Z_c = f(15,5) = 3558,9$$

$$Z_n = f(8,71) = 4047,6$$

Puisque $Z_n > Z_c$ (on maximise), on accepte le point candidat comme nouveau point courant.

- d. Voici les tableaux de résultats (les sorties vont varier d'une exécution à l'autre) :

Iter.	T	Trial Solution	f(x)	Prob.	Accept?
0		(15,5)	3358,875		
1	0,71,775	(19,969)	2109,262	0,156	true
2	0,71,775	(20,534)	1940,092	0,121	false
2	0,71,775	(21,477)	1660,207	0,08	false
2	0,71,775	(19,204)	2338,43	0,219	false
2	0,71,775	(19,887)	2133,965	0,161	false
2	0,71,775	(27,229)	309,132	0,011	false
2	0,71,775	(17)	2972,982	0,563	false
2	0,71,775	(23,823)	1008,933	0,03	false
2	0,71,775	(26,076)	501,51	0,014	false
2	0,71,775	(23,624)	1060,418	0,033	false
2	0,71,775	(19,411)	2276,374	0,2	false
2	0,71,775	(20,959)	1813,317	0,1	false
2	0,71,775	(28,29)	182,891	0,009	false
2	0,71,775	(13,798)	3721,953	1	true
3	0,71,775	(11,335)	4048,895	1	true
4	0,71,775	(10,937)	4074,467	1	true
5	0,71,775	(5,618)	3439,681	0,389	false
5	0,71,775	(7,183)	3839,649	0,705	true
6	335,888	(15,937)	3251,884	0,086	false
6	335,888	(2,106)	1738,864	0,001	false
6	335,888	(6,833)	3767,281	0,401	false
6	335,888	(12,092)	3977,902	0,75	true
7	335,888	(4,733)	3121,6	0,059	false
7	335,888	(16,379)	3138,708	0,062	false
7	335,888	(19,752)	2174,433	0,003	false

Best Solution x = 10,056 , Best f(x) = 4099,906

Iter.	T	Trial Solution	f(x)	Prob.	Accept?
7	335,888	(16,379)	3138,708	0,062	false
7	335,888	(19,752)	2174,433	0,003	false
7	335,888	(3,318)	2461,965	0,008	false
7	335,888	(6,589)	3711,327	0,339	true
8	335,888	(6,198)	3611,469	0,252	false
8	335,888	(12,697)	3901,351	0,597	false
8	335,888	(4,236)	2911,962	0,031	false
8	335,888	(3,64)	2629,26	0,014	false
8	335,888	(3,54)	2578,593	0,012	false
8	335,888	(5,51)	3404,69	0,136	false
8	335,888	(11,843)	4004,397	0,812	true
9	335,888	(7,106)	3824,439	0,475	true
10	335,888	(1,906)	1604,432	0,001	false
10	335,888	(6,079)	3578,592	0,228	true
11	167,944	(8,129)	3988,416	0,599	true
12	167,944	(8,603)	4038,704	0,808	false
12	167,944	(6,252)	3625,983	0,069	false
12	167,944	(5,792)	3494,285	0,032	false
12	167,944	(10,093)	4099,742	1	true
13	167,944	(9,454)	4024,63	0,639	true
14	167,944	(18,165)	2644,384	0	false
14	167,944	(7,66)	3926,076	0,356	false
14	167,944	(4,771)	3136,789	0,003	false
14	167,944	(3,935)	2773,239	0	false
14	167,944	(8,346)	4013,438	0,598	true
15	167,944	(13,191)	3827,084	0,197	false

Best Solution x = 10,056 , Best f(x) = 4099,906

Iter.	T	Trial Solution	f(x)	Prob.	Accept?
15	167,944	(13,191)	3827,084	0,197	false
15	167,944	(14,122)	3660,216	0,073	false
15	167,944	(16,287)	3162,64	0,004	false
15	167,944	(8,486)	4027,751	0,651	true
16	83,972	(14,32)	3620,679	0,003	false
16	83,972	(3,443)	2528,366	0	false
16	83,972	(10,183)	4099,004	0,991	true
17	83,972	(8,718)	4048,585	0,544	false
17	83,972	(0,976)	921,809	0	false
17	83,972	(9,053)	4072,218	0,721	true
18	83,972	(15,903)	3260,377	0	false
18	83,972	(14,395)	3605,46	0,003	false
18	83,972	(9,522)	4093,022	0,923	true
19	83,972	(10,67)	4086,627	0,657	false
19	83,972	(3,694)	2656,312	0	false
19	83,972	(14,766)	3527,026	0,001	false
19	83,972	(6,074)	3577,1	0,002	false
19	83,972	(11,992)	3988,858	0,267	true
20	83,972	(9,908)	4099,745	1	true
21	41,986	(5,798)	3496,233	0	false
21	41,986	(20,457)	1962,992	0	false
21	41,986	(0,158)	240,398	0	false
21	41,986	(5,33)	3343,991	0	false
21	41,986	(14,402)	3603,966	0	false
21	41,986	(6,709)	3739,447	0	false
21	41,986	(7,947)	3964,889	0,04	false

Best Solution x = 10,056 , Best f(x) = 4099,906

Iter.	T	Trial Solution	f(x)	Prob.	Accept?
21	41,986	(20,457)	1962,992	0	false
21	41,986	(0,158)	240,398	0	false
21	41,986	(5,33)	3343,991	0	false
21	41,986	(14,402)	3603,966	0	false
21	41,986	(6,709)	3739,447	0	false
21	41,986	(7,947)	3964,889	0,04	false
21	41,986	(8,831)	4057,393	0,365	false
21	41,986	(12,927)	3868,025	0,004	false
21	41,986	(2,68)	2100,553	0	false
21	41,986	(6,116)	3588,95	0	false
21	41,986	(7,307)	3862,882	0,004	false
21	41,986	(10,443)	4094,206	0,876	true
22	41,986	(2,954)	2260,868	0	false
22	41,986	(7,601)	3913,529	0,012	false
22	41,986	(11,178)	4060,024	0,388	false
22	41,986	(6,47)	3682,236	0	false
22	41,986	(8,04)	3977,191	0,054	false
22	41,986	(8,793)	4054,542	0,341	false
22	41,986	(12,524)	3924,961	0,016	false
22	41,986	(9,756)	4098,206	0,964	true
23	41,986	(3,638)	2628,151	0	false
23	41,986	(10,056)	4099,906	1	true
24	41,986	(9,786)	4098,61	0,97	true
25	41,986	(17,811)	2746,342	0	false
25	41,986	(4,145)	2870,664	0	false
25	41,986	(9,576)	4094,524	0,88	true

Best Solution x = 10,056 , Best f(x) = 4099,906

Voici les statistiques pour les différentes itérations :

Itération	Nombre de candidats	Solution meilleure?
1	1	non
2	13	oui
3	1	oui
4	1	oui
5	2	non
6	4	non
7	5	non
8	7	non
9	1	non
10	2	non
11	1	non
12	4	oui
13	1	non
14	5	non
15	4	non
16	3	non
17	3	non
18	3	non
19	5	non
20	1	oui
21	13	non
22	8	non
23	1	oui
24	1	non
25	3	non