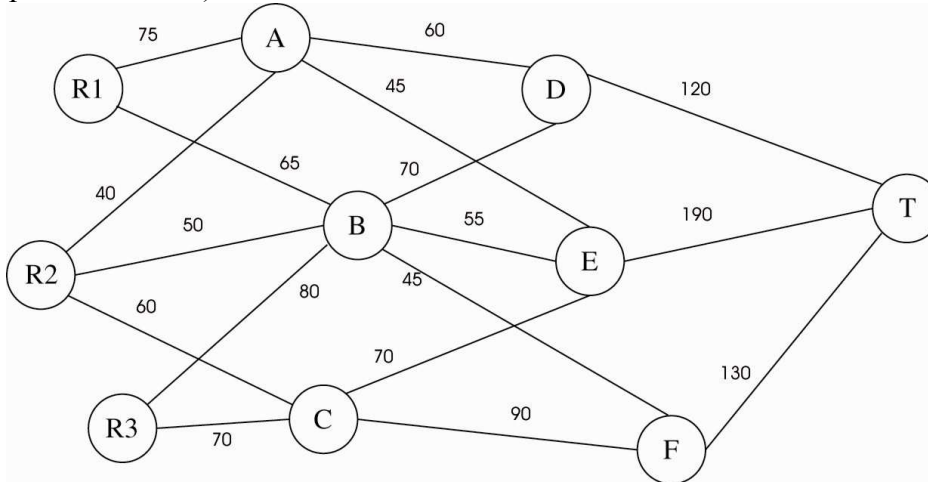


1. 9.5-3, p. 431

- a. Voici le graphe avec les capacités sur chaque arc (chaque arête doit être orientée avec la flèche pointant vers T) :



Il y a trois sources dans ce problème : R1, R2 et R3. On pourrait le transformer en un problème équivalent à une seule source de la façon suivante : on ajoute une source O reliée à :

R1, par un arc de capacité $75+65=140$;

R2, par un arc de capacité $40+50+60=150$;

R3, par un arc de capacité $80+70=150$.

Toutefois, cette transformation n'est pas nécessaire puisque chercher un chemin d'augmentation de O vers T revient à chercher un chemin d'augmentation de l'une des trois sources vers T; on peut donc exécuter l'algorithme de Ford-Fulkerson directement sur le graphe original.

T est le puits, alors que A, B, C, D, E et F sont des sommets de transfert.

- b. Voici les étapes de l'algorithme (construire le graphe résiduel à chaque étape) :

Flot initial : 0 sur chaque arc

Itération 1 :

Chemin d'augmentation : $R1 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$ de capacité résiduelle 60

(Capacité résiduelle, flot) :

$R1 \rightarrow A$ (15,60)

$A \rightarrow D$ (0,60)

$D \rightarrow T$ (60,60)

Itération 2 :

Chemin d'augmentation : $R1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow T$ de capacité résiduelle 15

(Capacité résiduelle, flot) :

$R1 \rightarrow A$ (0,75)

$A \rightarrow E$ (30,15)

$E \rightarrow T$ (175,15)

Itération 3 :

Chemin d'augmentation : $R1 \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ de capacité résiduelle 60

(Capacité résiduelle, flot) :

$R1 \rightarrow B$ (5,60)

$B \rightarrow D$ (10,60)

$D \rightarrow T$ (0,120)

Itération 4 :

Chemin d'augmentation : $R1 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ de capacité résiduelle 5

(Capacité résiduelle, flot) :

$R1 \rightarrow B$ (0,65)

$B \rightarrow E$ (50,5)

$E \rightarrow T$ (170,20)

Itération 5 :

Chemin d'augmentation : $R2 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow T$ de capacité résiduelle 30

(Capacité résiduelle, flot) :

$R2 \rightarrow A$ (10,30)

$A \rightarrow E$ (0,45)

$E \rightarrow T$ (140,50)

Itération 6 :

Chemin d'augmentation : $R2 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ de capacité résiduelle 50

(Capacité résiduelle, flot) :

$R2 \rightarrow B$ (0,50)

$B \rightarrow E$ (0,55)

$E \rightarrow T$ (90,100)

Itération 7 :

Chemin d'augmentation : $R2 \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ de capacité résiduelle 60

(Capacité résiduelle, flot) :

$R2 \rightarrow C$ (0,60)

$C \rightarrow E$ (10,60)

$E \rightarrow T$ (30,160)

Itération 8 :

Chemin d'augmentation : $R3 \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ de capacité résiduelle 10

(Capacité résiduelle, flot) :

$R3 \rightarrow C$ (60,10)

$C \rightarrow E$ (0,70)

$E \rightarrow T$ (20,170)

Itération 9 :

Chemin d'augmentation : $R3 \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow T$ de capacité résiduelle 60

(Capacité résiduelle, flot) :

$R3 \rightarrow C$ (0,70)

$C \rightarrow F$ (30,60)

$F \rightarrow T$ (70,60)

Itération 10 :

Chemin d'augmentation : $R3 \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow T$ de capacité résiduelle 45

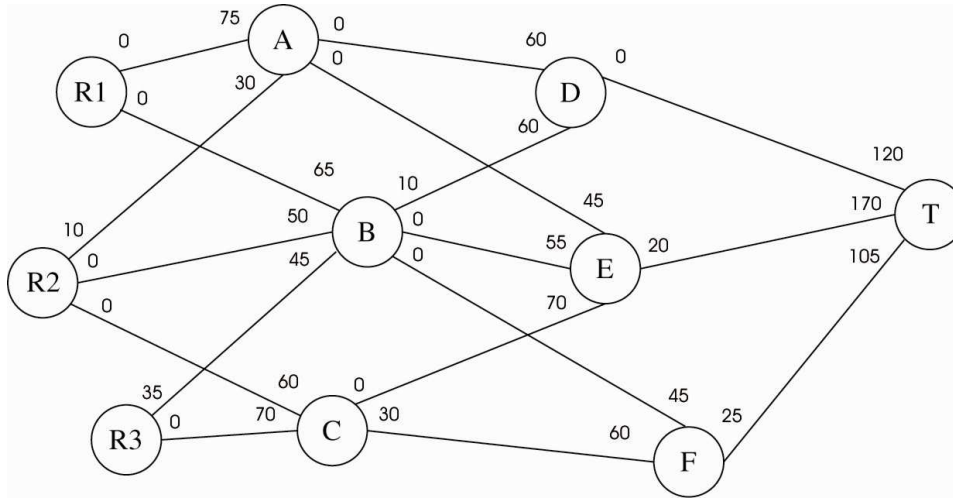
(Capacité résiduelle, flot) :

$R3 \rightarrow B$ (35,45)

$B \rightarrow E$ (50,5)

$E \rightarrow T$ (170,20)

Voici le graphe résiduel après cette itération :



On ne peut plus identifier de chemin d'augmentation, car en appliquant l'algorithme de marquage vu au cours, on marque successivement R1, R2, A, R3, B, et D, et on arrête sans avoir pu marquer T.

La valeur du flot maximum est 395, et les arcs étant tous orientés vers T, la valeur à l'extrémité droite de chaque arête correspond à la valeur du flot sur chaque arc.

On peut également vérifier notre réponse grâce au théorème flot max – coupe min : les sommets qui ont été marqués lors de la recherche d'un chemin d'augmentation à la dernière itération correspondent à la coupe min. Ainsi, $X = \{R1, R2, R3, A, B, D\}$, et les arcs de la coupe sont :

(R2,C) de capacité 60;

(R3,C) de capacité 70;

(A,E) de capacité 45;

(B,E) de capacité 55;

(B,F) de capacité 45;

(D,T) de capacité 120.

La somme des capacités de ces arcs est bien égale à 395.

c. Voir le fichier *TP5_flot_max_1.xls*

TP5_flot_max_1 (9.5-3)

De	A	Flot	Capacité	Sommets	Flot net	Offre/demande
R1	A	75	<= 75	R1	140	
R1	B	65	<= 65	R2	140	
R2	A	30	<= 40	R3	115	
R2	B	50	<= 50	A	0	= 0
R2	C	60	<= 60	B	0	= 0
R3	B	45	<= 80	C	0	= 0
R3	C	70	<= 70	D	0	= 0
A	D	60	<= 60	E	0	= 0
A	E	45	<= 45	F	0	= 0
B	D	60	<= 70	T	-395	
B	E	55	<= 55			
B	F	45	<= 45			
C	E	45	<= 70			
C	F	85	<= 90			
D	T	120	<= 120			
E	T	145	<= 190			
F	T	130	<= 130			

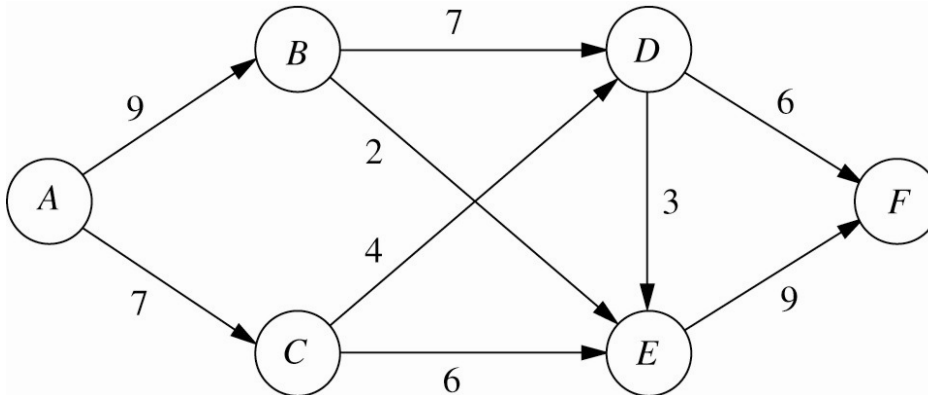
Noms d'intervalles	Cellules
Capacité	F4:F20
Flot	D4:D20
De	B4:B20
Flot_maximum	D22
Flot_net	I4:I13
Sommets	H4:H13
Offre_demande	K7:K12
A	C4:C20

Flot maximum 395

Notez que la solution est différente de celle que nous avons identifiée.

2. 9.5-6, p. 432

a. Voici le graphe (A est la source et F est le puits) :



Voici les étapes de l'algorithme (construire le graphe résiduel à chaque étape) :

Flot initial : 0 sur chaque arc

Itération 1 :

Chemin d'augmentation : $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$ de capacité résiduelle 6

(Capacité résiduelle, flot) :

$A \rightarrow B$ (3,6)

$B \rightarrow D$ (1,6)

$D \rightarrow F$ (0,6)

Itération 2 :

Chemin d'augmentation : $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ de capacité résiduelle 2

(Capacité résiduelle, flot) :

$A \rightarrow B$ (1,8)

$B \rightarrow E$ (0,2)

$E \rightarrow F$ (7,2)

Itération 3 :

Chemin d'augmentation : $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ de capacité résiduelle 1

(Capacité résiduelle, flot) :

$A \rightarrow B$ (0,9)

$B \rightarrow D$ (0,7)

$D \rightarrow E$ (2,1)

$E \rightarrow F$ (6,3)

Itération 4 :

Chemin d'augmentation : $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$ de capacité résiduelle 6

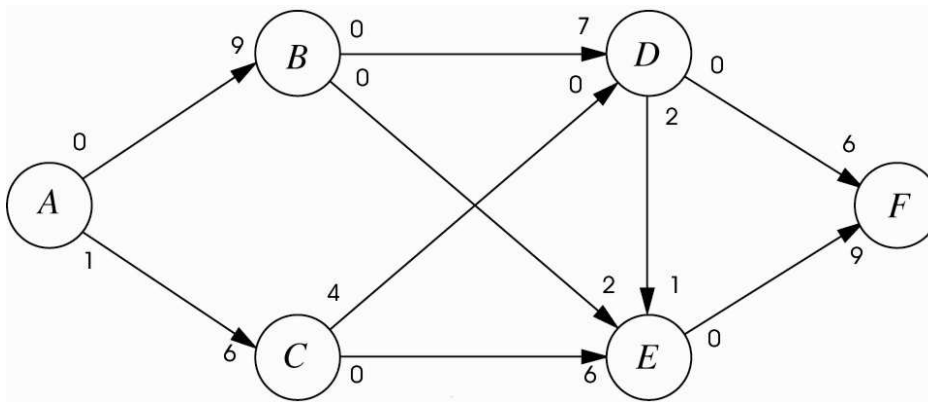
(Capacité résiduelle, flot) :

$A \rightarrow C$ (1,6)

$C \rightarrow E$ (0,6)

$E \rightarrow F$ (0,9)

Voici le graphe résiduel après cette itération (on peut enlever les orientations sur les arcs) :



On ne peut plus identifier de chemin d'augmentation, car après avoir marqué successivement A, C, D, E et B (on parcourt ce dernier arc en sens inverse), on ne peut plus marquer de sommet non marqué, et on n'a pas réussi à marquer F.

La valeur du flot maximum est 15 et la valeur à l'extrémité terminale de chaque arc correspond au flot sur cet arc.

La coupe minimum est constituée des sommets marqués lors de la dernière itération, soit $X = \{A, B, C, D, E\}$, et les arcs de la coupe sont (D,F) et (E,F) de capacité totale égale à 15, la valeur du flot maximum.

b. Voir le fichier *TP5_flot_max_2.xls*

TP5_flot_max_2 (9.5-6)

De		Flot	Capacité	Sommets	Flot net	Offre/demande
A	B	9	9	A	15	
A	C	6	7	B	0	= 0
B	D	7	7	C	0	= 0
B	E	2	2	D	0	= 0
C	D	2	4	E	0	= 0
C	E	4	6	F	-15	
D	E	3	3			
D	F	6	6			
E	F	9	9			

Noms d'intervalles	Cellules
Capacité	F4:F12
Flot	D4:D12
De	B4:B12
Flot_maximum	D14
Flot_net	I4:I9
Sommets	H4:H9
Offre_demande	K5:K8
A	C4:C12

Flot maximum	15
--------------	----

Notez que la solution est différente de celle que nous avons identifiée.

3. 4.3.7, p. 164

- a. Faux : on choisit la variable d'entrée qui fournit la plus grande augmentation marginale (par unité) pas la plus grande augmentation globale
- b. Vrai : la règle du ratio minimum est celle qu'on applique lorsqu'on détermine la variable de sortie de façon à demeurer dans le domaine réalisable après un pivot
- c. Faux : c'est la nouvelle variable de base (pas hors-base) qu'on élimine de toutes les équations, sauf une

4. 4.3.5, p. 163

- a. On force simplement x_2 et x_3 à entrer dans la base en effectuant deux pivots successifs.

b. $\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 30$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Pivot sur x_2 :

$$x_4 = 20 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 20$$

$$x_5 = 30 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 30$$

La variable de sortie est donc x_4

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & = & 20 \\ & & x_1 & & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 10 \\ Z & + & x_1 & & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 60 \end{array}$$

Pivot sur x_3 :

$$x_2 = 20 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 20$$

$$x_5 = 10 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 10$$

La variable de sortie est donc x_5

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 10 \\ & & x_1 & & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 10 \\ Z & + & 2x_1 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 70 \end{array}$$

Cette solution est en effet optimale.

5. 4.5.8, p. 166

« Enter or revise a general LP »

Number of Decision Variables (≤ 6):

Number of Functional Constraints (≤ 6):

(To make a new number above take effect, you must press the ENTER key.)

Max $Z = 1 x_1 + 1 x_2 + 1 x_3 + 1 x_4$

Subject to:

$x_1 +$ $x_2 +$ $x_3 +$ $x_4 \leq$

$x_1 +$ $x_2 +$ $x_3 +$ $x_4 \leq$

And

$x_1 \geq$, $x_2 \geq$, $x_3 =$, $x_4 \geq$

« Set up for the simplex method »

Maximize Z: $Z - 1 x_1 - 1 x_2 - 1 x_3 - 1 x_4 + 0 x_5 + 0 x_6 = 0$

$1 x_1 + 1 x_2 + 0 x_3 + 0 x_4 + 1 x_5 + 0 x_6 = 3$

$0 x_1 + 0 x_2 + 1 x_3 + 1 x_4 + 0 x_5 + 1 x_6 = 2$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0$

« Solve interactively by the simplex method »

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0
x5	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x6	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Select the entering and the leaving basic variable by clicking on the corresponding column and row (pivot equation) above. Then enter the factor by which to divide the pivot equation. Then press the NEXT button.

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	0	0	-1	-1	1	0	3
x1	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x6	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Select the entering and the leaving basic variable by clicking on the corresponding column and row (pivot equation) above. Then enter the factor by which to divide the pivot equation. Then press the NEXT button.

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	5
x1	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x3	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Is the current feasible solution optimal?

C'est une solution optimale, mais est-ce la seule? Non, car on remarque que deux variables hors-base ont un coût réduit nul, ce qui veut dire qu'on peut augmenter leur valeur sans changer la valeur de l'objectif. Effectuons d'abord un pivot sur x_2

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	5
x1	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x3	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Select the entering and the leaving basic variable by clicking on the corresponding column and row (pivot equation) above. Then enter the factor by which to divide the pivot equation. Then press the NEXT button.

On obtient alors une deuxième solution optimale :

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	5
x2	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x3	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Is the current feasible solution optimal?

Puisque x_4 est à coût réduit nul, on peut pivoter sur cette variable pour obtenir une troisième solution optimale :

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	5
x2	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x4	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Is the current feasible solution optimal? N

Puisque x_7 est à coût réduit nul, on peut pivoter sur cette variable pour obtenir une quatrième solution optimale :

Bas...	Eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right Side
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	5
x1	1	0	1	1	0	0	1	0	3
x4	2	0	0	0	1	1	0	1	2

Is the current feasible solution optimal? N

Tout autre pivot nous ramènerait vers une solution déjà énumérée, donc on a identifié toutes les solutions optimales.

6. 6.1-4, p. 277

a. Voici le dual :

$$\text{Min } W = 12 y_1 + y_2$$

$$y_1 + y_2 \geq -1$$

$$y_1 + y_2 \geq -2$$

$$2y_1 - y_2 \geq -1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

b. Étant donné que les variables sont ≥ 0 et que les coefficients dans l'objectif du dual sont aussi ≥ 0 , on a que l'objectif du dual est ≥ 0 . Or, une solution réalisable est $(y_1, y_2) = (0, 0)$, puisqu'elle satisfait toutes les contraintes. La valeur de cette solution est 0, le minimum de la valeur de l'objectif. Il s'agit donc d'une solution optimale du dual.

Or, la théorie de la dualité nous assure que dans ce cas, le primal a aussi une solution optimale de valeur 0. D'où, $\text{Max } Z = 0 \leq 0$.