

1. 9.6-1, p. 432

L'idée (vue rapidement au cours) est de formuler le problème de flot maximum en un problème de flot à coût minimum en ajoutant un arc entre la source et le puits, de capacité et de coût infinis. Ainsi, dans ce modèle de flot à coût minimum :

la source A est un sommet d'offre (ici, on suggère d'utiliser une offre égale à $20 > 16$, la somme des capacités des arcs sortant de la source);

le puits F est un sommet de demande (demande = offre = 20);

tous les autres sommets sont des sommets de transfert;

les capacités des arcs correspondent à celles fournies avec la définition du problème de flot maximum, mais celle de l'arc ajouté (A,F) est infinie;

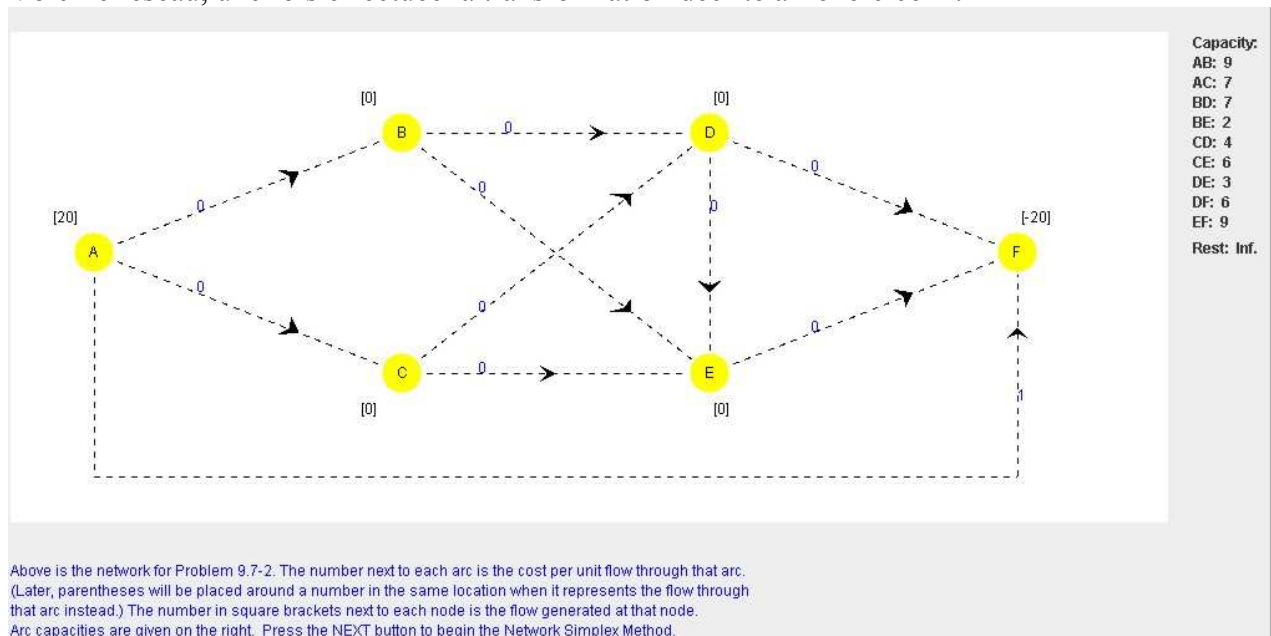
les coûts de tous les arcs sont 0, sauf celui de l'arc ajouté (A,F) qui a un coût infini (en pratique, on peut prendre le coût égal à 1).

Puisque, dans le problème de flot à coût minimum, on cherche à minimiser la somme des coûts, on voudra éviter l'arc ajouté (A,F) (car son coût est supérieur à celui de tous les autres arcs!), et donc, le maximum de flot circulera dans le reste du réseau. Pour obtenir la valeur du flot maximum, il suffit de soustraire à l'offre la valeur de l'objectif, qui correspond au flot sur l'arc ajouté (A,F).

2. 9.7-2, p. 434

a. Ici, on impose une solution de base initiale en spécifiant les arcs devant appartenir à l'arbre partiel correspondant, et les arcs hors-base qui sont à capacité (ces arcs seront inversés). On va utiliser ici IOR Tutorial pour identifier cette première solution de base (voir l'exercice 4 pour une solution manuelle).

Voici le réseau, une fois effectuée la transformation décrite à l'exercice 1 :



On spécifie par la suite les arcs de l'arbre partiel initial, (A,B), (A,C), (A,F), (B,D) et (E,F), de même que les arcs hors-base inversés (à capacité), soit (D,F) et (C,E). Le résultat suivant apparaît :

Capacity:
 AB: 9
 AC: 7
 BD: 7
 BE: 2
 CD: 4
 CE: 6
 DE: 3
 DF: 6
 EF: 9
 Rest: Inf.

Please specify the initial flow for each basic arc:

The initial flow for AB =

The initial flow for AC =

The initial flow for AF =

The initial flow for BD =

The initial flow for EF =

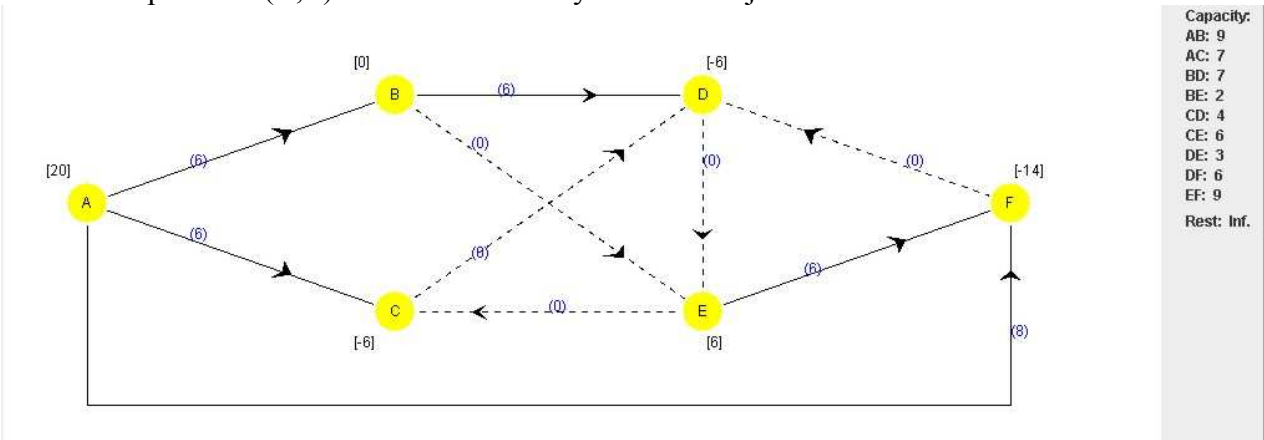
Il faut alors spécifier les flots initiaux sur les arcs de l'arbre partiel. Pour cela, il suffit de vérifier les équations de conservation du flot pour chaque sommet, et en utilisant uniquement les arcs de l'arbre partiel (les autres arcs sont à flot nul). On obtient ainsi :

- Flot (A,C) = 6
- Flot (B,D) = 6
- Flot (A,B) = 6
- Flot (E,F) = 6
- Flot (A,F) = 8

Voici donc la solution de base (l'arbre partiel) initiale :

Capacity:
 AB: 9
 AC: 7
 BD: 7
 BE: 2
 CD: 4
 CE: 6
 DE: 3
 DF: 6
 EF: 9
 Rest: Inf.

b. On évalue tout d'abord l'impact de l'ajout de chaque arc hors-base à l'arbre partiel courant. On commence par l'arc (B,E) et on identifie le cycle créé en ajoutant cet arc :

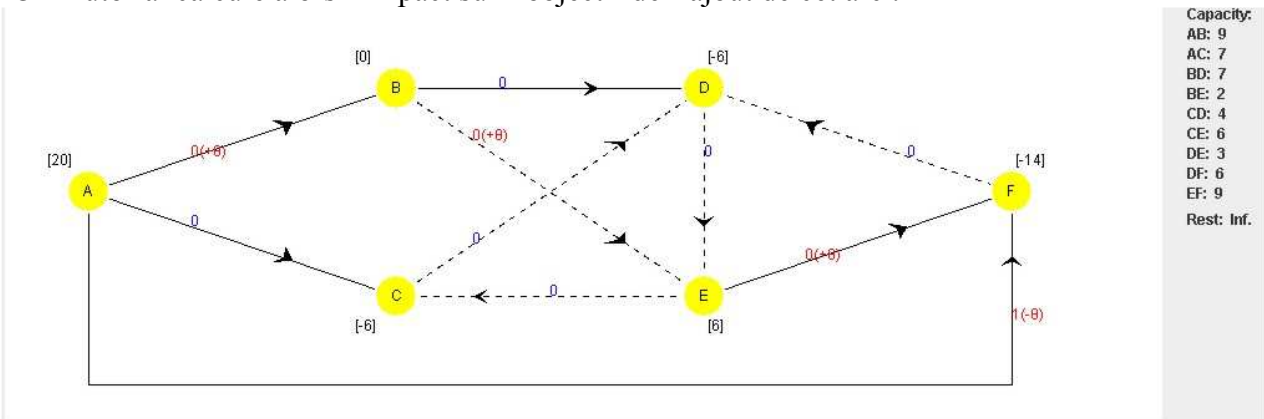


Capacity:
 AB: 9
 AC: 7
 BD: 7
 BE: 2
 CD: 4
 CE: 6
 DE: 3
 DF: 6
 EF: 9
 Rest: Inf.

Suppose arc BE is added to the feasible spanning tree. Then identify the undirected cycle created, beginning with node B and E and ending with node B.

Cycle created when arc BE is added to the spanning tree:

IOR Tutorial calcule alors l'impact sur l'objectif de l'ajout de cet arc :



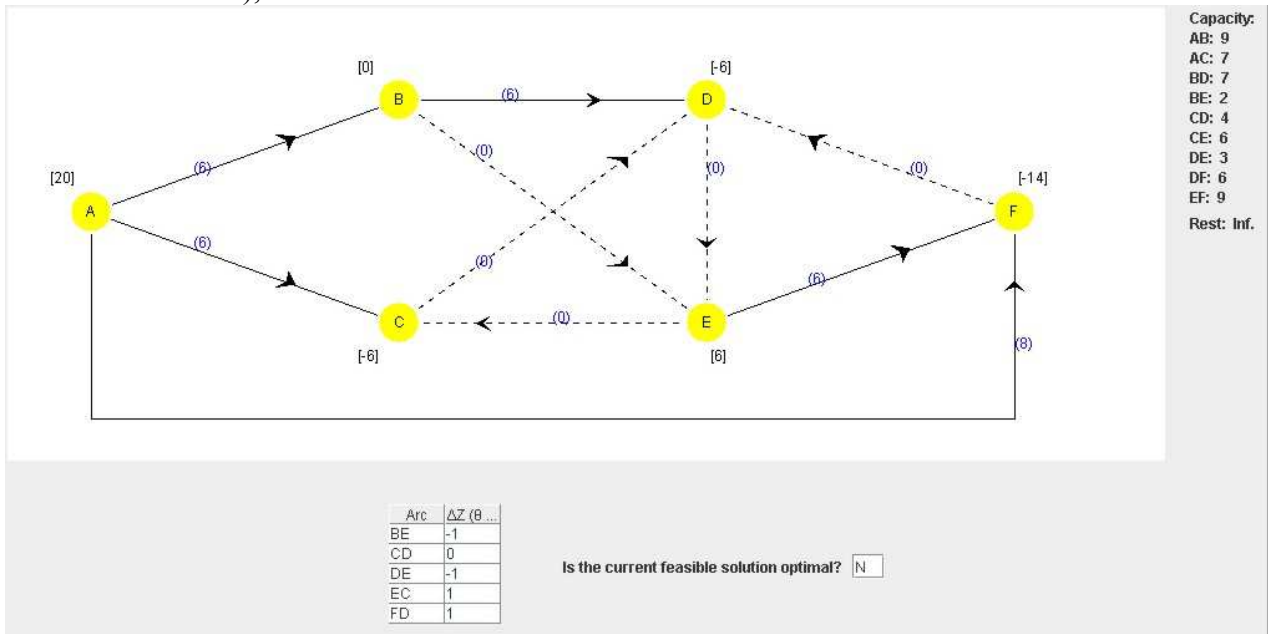
Capacity:
 AB: 9
 AC: 7
 BD: 7
 BE: 2
 CD: 4
 CE: 6
 DE: 3
 DF: 6
 EF: 9
 Rest: Inf.

Suppose arc BE with θ is added to the feasible spanning tree. The above network shows next to each arc the resulting incremental flow and the cost per unit flow.

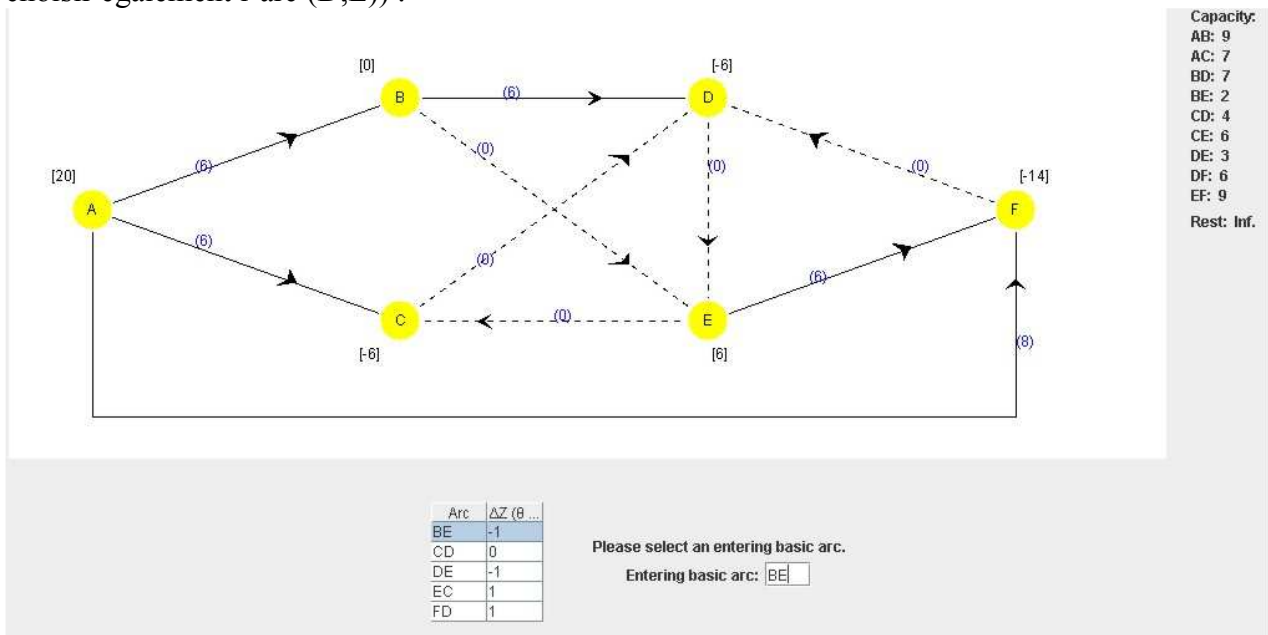
When $\theta = 1$, the resulting overall increment in total cost (Z) is:

$$\Delta Z = +0 + 0 - 1 + 0 = -1$$

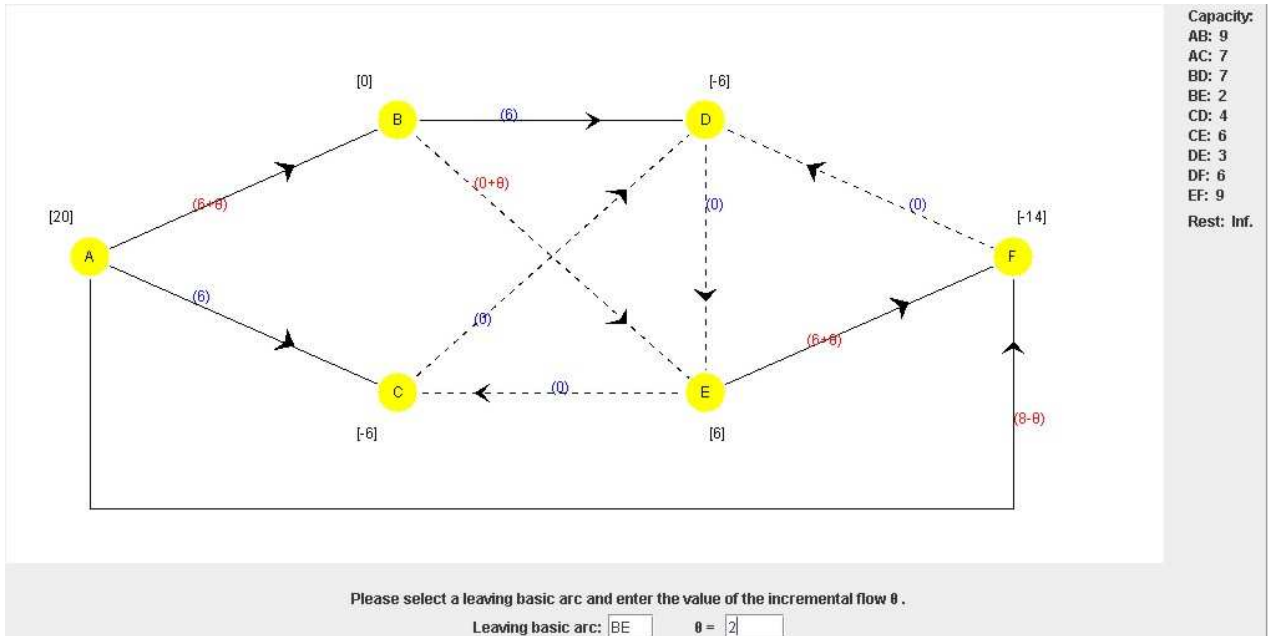
Une fois ce calcul effectué pour tous les arcs hors-base (les deux écrans précédents sont répétés pour chacun de ces arcs), nous obtenons le tableau suivant :



On choisit alors d'ajouter l'arc (B,E), puisque sa contribution à l'objectif est négative (on aurait pu choisir également l'arc (D,E)) :



On demande alors de sélectionner l'arc sortant :



Ici, le cycle créé par l'ajout de l'arc (B,E) comprend les arcs suivants :

(B,E), dont le flot ne peut être augmenté de plus de 2 unités;

(E,F), dont le flot ne peut être augmenté de plus de $9-6 = 3$ unités;

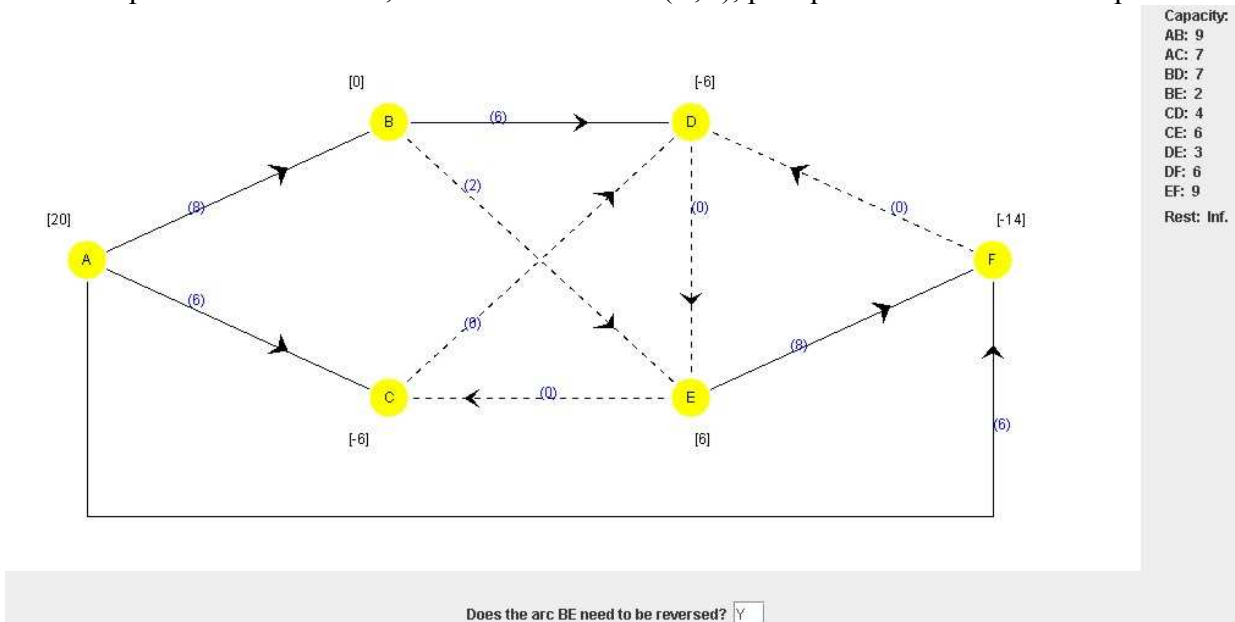
(A,F), dont le flot ne peut être diminué de plus de $8-0 = 8$ unités;

(A,B), dont le flot ne peut être augmenté de plus de $9-6 = 3$ unités.

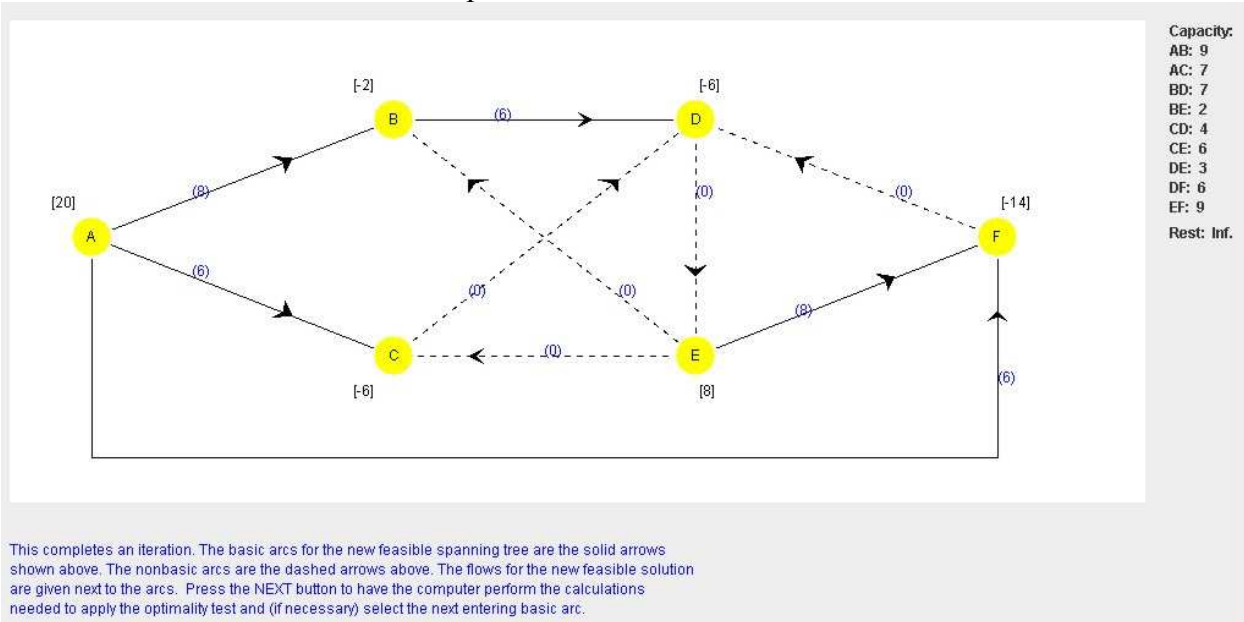
La quantité de flot minimum est 2, et elle est atteinte pour l'arc (B,E), qui est donc l'arc sortant.

Notez que (B,E) était aussi l'arc entrant! C'est donc dire que l'arbre partiel ne sera pas modifié, mais le flot sera modifié, puisqu'il passera de 0 à la capacité sur l'arc (B,E).

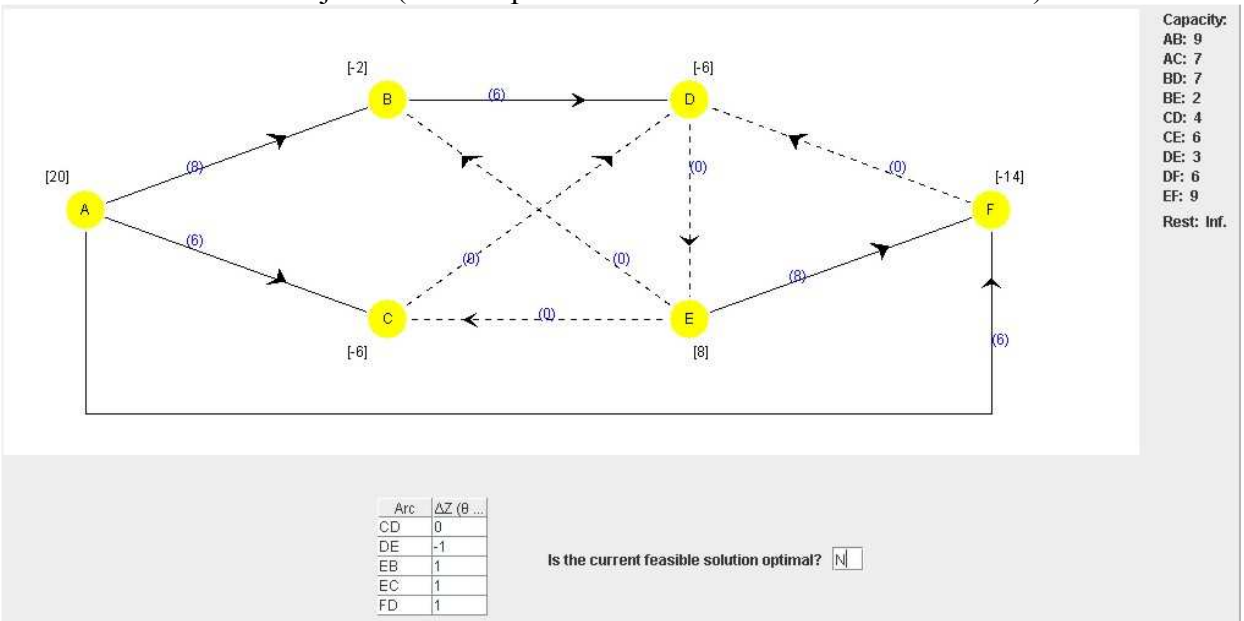
Pour compléter cette itération, il faut inverser l'arc (B,E), puisqu'il est maintenant à capacité :



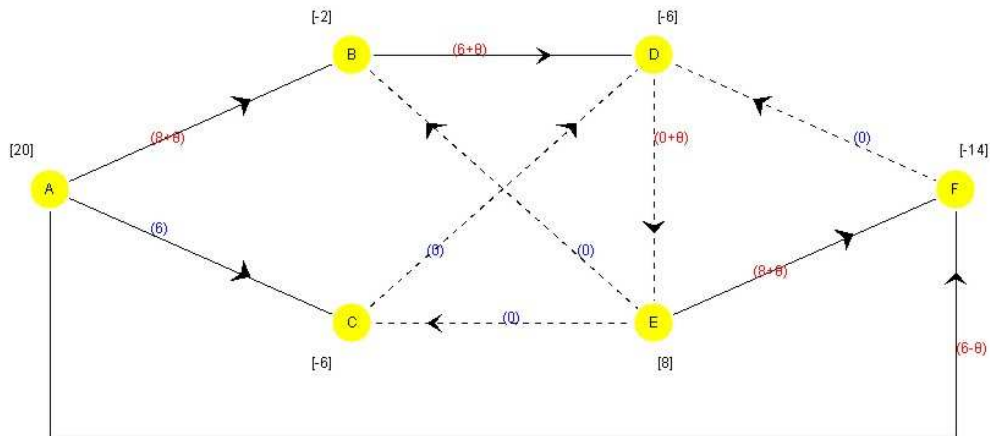
La solution obtenue à la fin de cette première itération est donc la suivante :



IOR Tutorial fournit alors immédiatement le tableau mesurant l'impact de l'ajout de chaque arc hors-base sur la valeur de l'objectif (seule la première itération est exécutée en détails) :



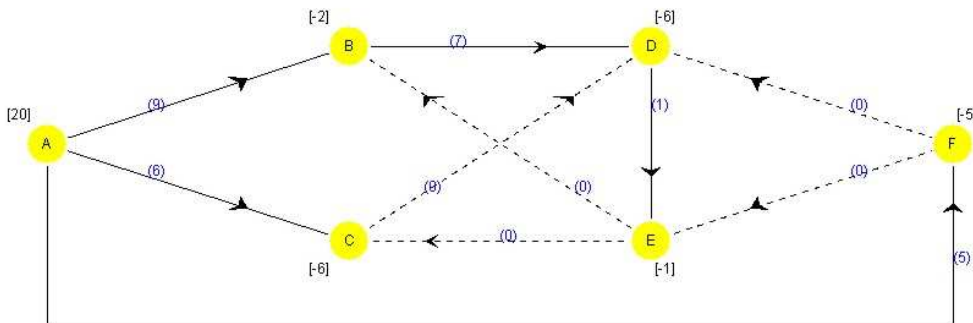
Une fois l'arc (D,E) choisi, on obtient le cycle suivant :



Please select a leaving basic arc and enter the value of the incremental flow θ .

Leaving basic arc: $\theta =$

On choisit de sortir l'arc (E,F) (on aurait pu choisir également les arcs (A,B) ou (B,D), qui sont également saturés par le pivot). Pour compléter le pivot, on inverse ensuite l'arc (E,F), puisqu'il a atteint sa capacité. On obtient alors une solution optimale, puisque tous les arcs hors-base ne peuvent contribuer à réduire la valeur de l'objectif. Il faut par la suite récupérer les flots sur les arcs inversés pour obtenir la solution optimale :



The following arcs have been reversed. Please enter their flows in the original direction.

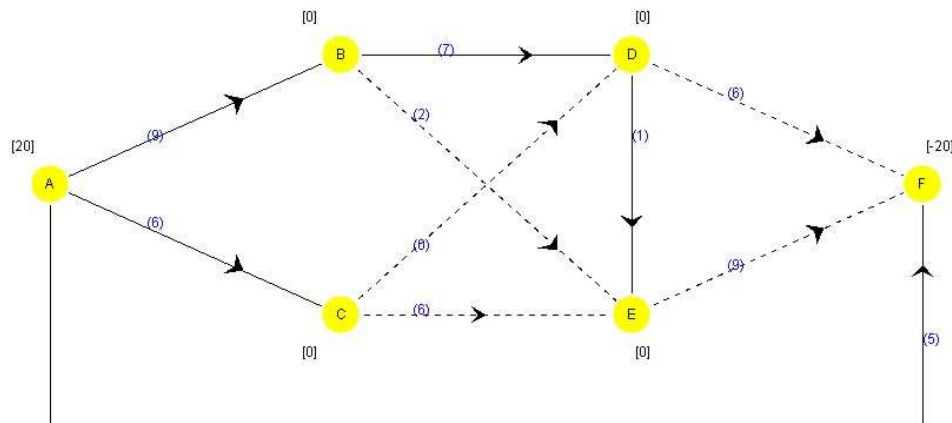
Flow through arc BE =

Flow through arc CE =

Flow through arc DF =

Flow through arc EF =

La solution optimale est alors :



Capacity:
 AB: 9
 AC: 7
 BD: 7
 BE: 2
 CD: 4
 CE: 6
 DE: 3
 DF: 6
 EF: 9
 Rest: Inf.

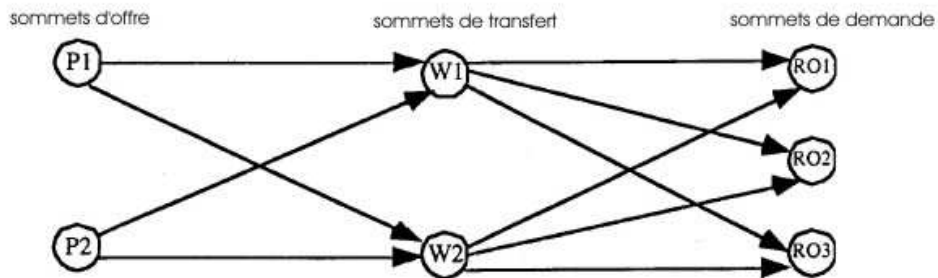
Shown above is the optimal solution including the flows through all of the original arcs.

Total Cost: $Z = 5.0$

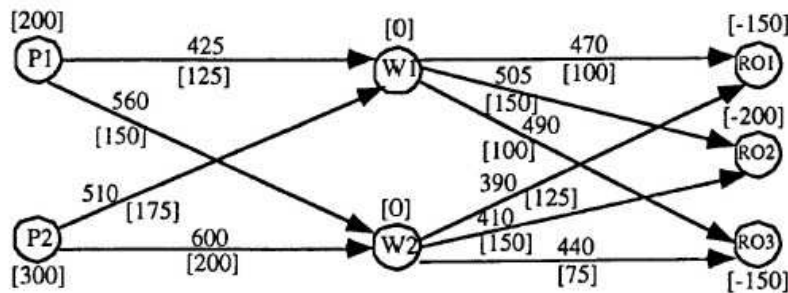
La valeur du flot maximum est obtenue en soustrayant la valeur de l'objectif (qui correspond au flot circulant sur l'arc (A,F)) à l'offre à la source; on obtient bien $20 - 5 = 15$ (et la solution correspond à celle que nous avons identifiée à l'exercice 2).

3. 9.6-4, p. 432

a. Voici le réseau :



b. C'est un problème de flot à coût minimum; les données sont représentées sur le graphe suivant : sur chaque sommet i , on identifie, entre crochets b_i , (> 0 , si i est un sommet d'offre; $= 0$, si i est un sommet de transfert; < 0 , si i est un sommet de demande); pour chaque arc (i,j) , on identifie le coût par unité de flot c_{ij} , et, entre crochets, la capacité u_{ij} .



c. Voir le fichier *TP5b_flot_cout_min.xls*

TP5b_flot_coût_min

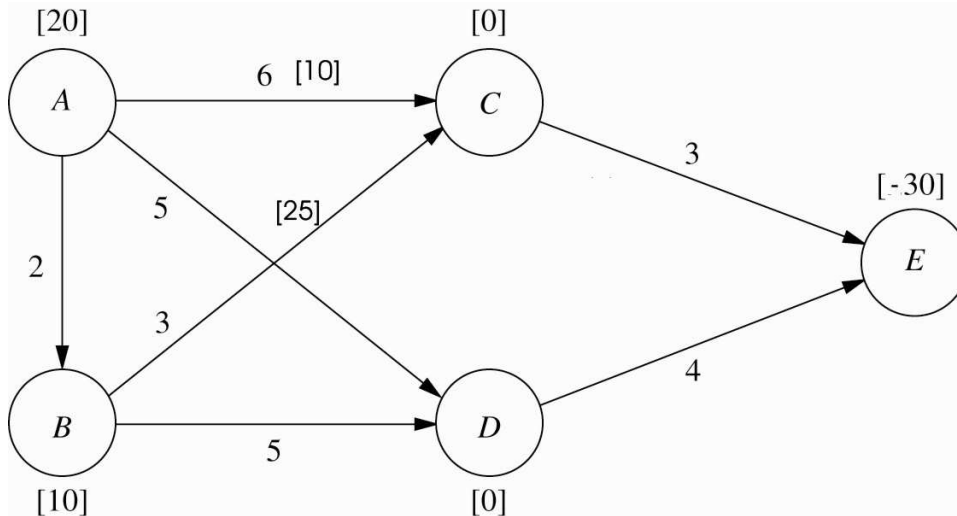
De	À	Flot	Capacité	Coût unitaire	Sommets	Flot net	Offre/demande
P1	W1	125	125	425 \$	P1	200	200
P1	W2	75	150	560 \$	P2	300	300
P2	W1	125	175	510 \$	W1	0	0
P2	W2	175	200	600 \$	W2	0	0
W1	RO1	100	100	470 \$	RO1	-150	-150
W1	RO2	50	150	505 \$	RO2	-200	-200
W1	RO3	100	100	490 \$	RO3	-150	-150
W2	RO1	50	125	390 \$			
W2	RO2	150	150	410 \$			
W2	RO3	50	75	440 \$			

Noms d'intervalles	Cellules
De	B4:B13
À	C4:C13
Flot	D4:D13
Capacité	F4:F13
Coût_unitaire	G4:G13
Sommets	I4:I10
Flot_net	J4:J10
Offre/demande	L4:L10
Coût_total	D15

Min Coût total 488 125 \$

4. 9.7-1, p. 433

a. Voici le réseau initial :



Seulement deux arcs ont une capacité finie, (A,C) et (B,C).

On veut ici identifier une solution de base réalisable initiale (correspondant à un arbre partiel). On impose que les arcs (A,B), (C,E), (D,E) et (A,C) (ce dernier inversé) feront partie de cet arbre partiel. De plus, un des arcs hors-base (B,C), sera aussi inversé.

Pour obtenir le flot sur chaque arc, il suffit de vérifier les équations de conservation du flot pour chaque sommet, en se restreignant aux arcs de l'arbre (les autres sont à flot nul, sauf l'arc (B,C) dont le flot est égal à la capacité, soit 25).

Invertissons d'abord les arcs :

Inversion de (A,C) : on obtient l'arc (C,A); il y a une offre de 10 au sommet C, alors que l'offre en A est maintenant $20-10=10$;

Inversion de (B,C) : on obtient l'arc (C,B); l'offre en C devient $10+25=35$, alors que l'offre en B devient une demande : $10-25 = -15$.

On obtient successivement les flots sur les arcs :

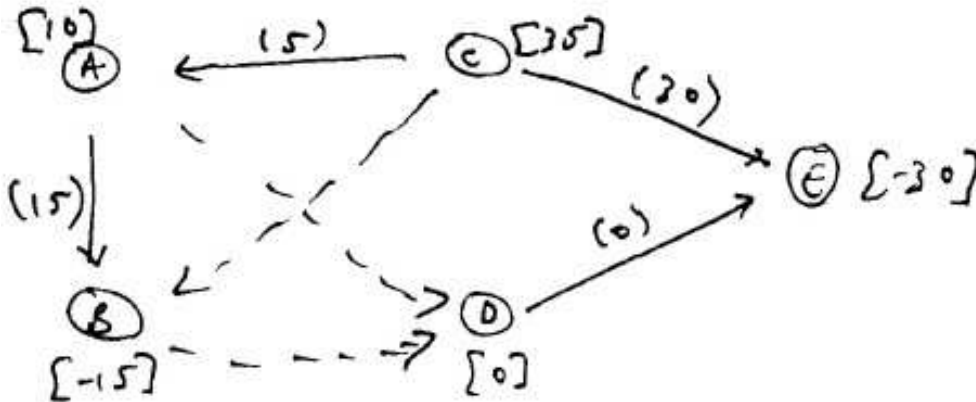
Flot (D,E) = 0 (seul cet arc sort du sommet D dont l'offre est 0)

Flot (C,E) = 30

Flot (C,A) = 5 (l'offre en C est 35, et 30 unités ont été envoyées vers E)

Flot (A,B) = 15

Voici l'arbre partiel obtenu :



b. On regarde l'impact sur l'objectif de l'ajout de chacun des arcs hors-base.

Ajout de (A,D) : Le cycle obtenu est ADECA; l'impact sur l'objectif est $5+4-3-6 = 0$

Ajout de (C,B) : Le cycle obtenu est CBAC; l'impact sur l'objectif est $-3-2+6 = 1$

Ajout de (B,D) : Le cycle obtenu est BDECAB; l'impact sur l'objectif est $5+4-3-6+2 = 2$

Puisqu'il n'y a aucun arc qui permette de diminuer la valeur de l'objectif, la solution est optimale.

Toutefois, l'arc (A,D) peut être ajouté sans changer la valeur de l'objectif. Effectuons un pivot dans lequel (A,D) est l'arc ajouté.

Le long du cycle ADECA, regardons sur chaque arc comment le flot peut être modifié de façon à demeurer réalisable :

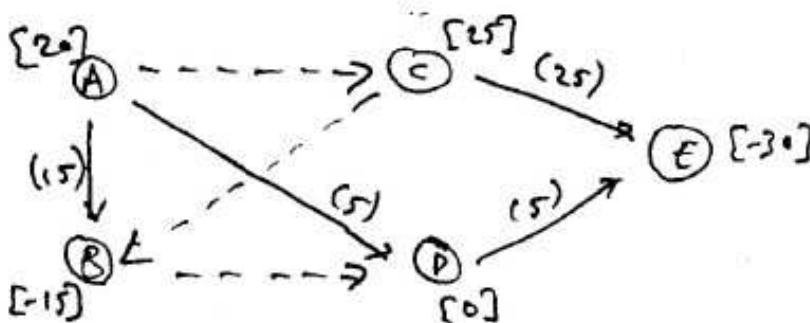
(A,D) : on peut augmenter le flot indéfiniment

(D,E) : on peut augmenter le flot indéfiniment

(E,C) : on peut diminuer le flot de 30 unités

(C,A) : on peut augmenter le flot de 5 unités

(C,A) est donc l'arc qui doit sortir de la base. Puisque le flot atteint la capacité sur cet arc, on doit l'inverser : on retrouve l'arc (A,C) et le pivot a vidé le flot sur cet arc. La nouvelle solution de base est alors :



Toute solution obtenue en combinant les deux solutions déjà identifiées est optimale ($0 \leq \varepsilon \leq 5$) :

$$\text{Flot (A,B)} = 15$$

$$\text{Flot (A,D)} = \varepsilon$$

$$\text{Flot (A,C)} = 5 - \varepsilon$$

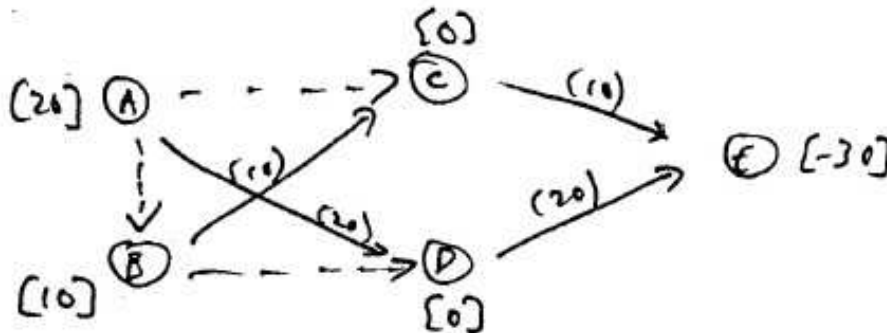
$$\text{Flot (D,E)} = \varepsilon$$

$$\text{Flot (C,E)} = 30 - \varepsilon$$

$$\text{Flot (B,C)} = 25$$

$$\text{Flot (B,D)} = 0$$

c. La solution de base initiale donnée par le tableau peut être représentée ainsi :



On regarde d'abord l'impact sur l'objectif de l'ajout de chacun des arcs hors-base.

Ajout de (A,B) : Le cycle obtenu est ABCEDA; l'impact sur l'objectif est $2+3+3-4-5 = -1$

Ajout de (A,C) : Le cycle obtenu est ACEDA; l'impact sur l'objectif est $6+3-4-5 = 0$

Ajout de (B,D) : Le cycle obtenu est BDECB; l'impact sur l'objectif est $5+4-3-3 = 3$

On ajoute donc l'arc (A,B). Le long du cycle ABCEDA, regardons sur chaque arc comment le flot peut être modifié de façon à demeurer réalisable :

(A,B) : on peut augmenter le flot indéfiniment

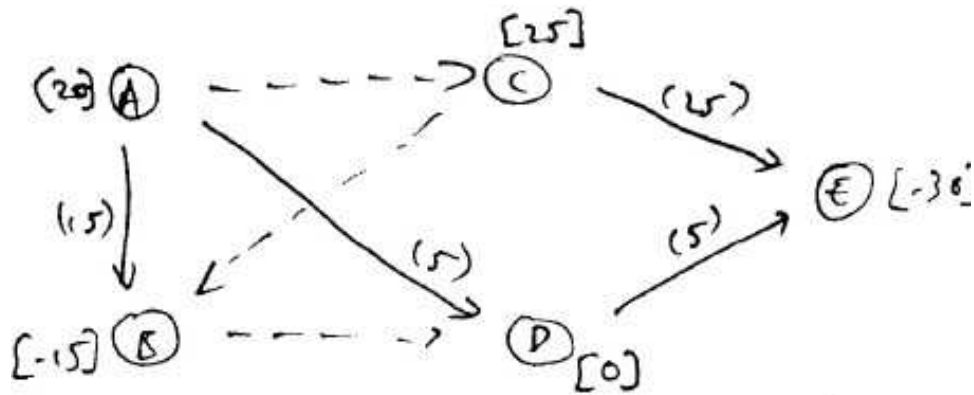
(B,C) : on peut augmenter le flot de 15 unités

(C,E) : on peut augmenter le flot indéfiniment

(D,E) : on peut diminuer le flot de 20 unités

(A,D) : on peut diminuer le flot de 20 unités

L'arc (B,C) sort donc de l'arbre et on augmente le flot de 15 unités le long du cycle. On obtient alors la solution suivante :



Cette solution correspond à la solution optimale identifiée en b.