

1. **11.3-2, p. 536**

Tout d'abord, on applique la transformation vue au cours pour une fonction ayant plusieurs valeurs possibles :

$$|x_1 - x_2| = 0y_1 + 3y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$$

Puisque la fonction valeur absolue n'est pas linéaire, on doit appliquer une seconde transformation. Si on a :  $|x_1 - x_2| = a$ , avec  $a > 0$ , il suffit d'introduire deux variables binaires  $y^+, y^-$  telles que  $y^+ = 1$ , si  $x_1 \geq x_2$ ,  $y^- = 1$ , si  $x_1 < x_2$  et  $y^+ + y^- = 1$ . Ainsi,  $|x_1 - x_2| = a \Leftrightarrow x_1 - x_2 = ay^+ - ay^-$ .

En combinant ces deux transformations, on obtient :

$$x_1 - x_2 = 0y_1 + 3y_2^+ - 3y_2^- + 6y_3^+ - 6y_3^-$$

$$y_1 + y_2^+ + y_2^- + y_3^+ + y_3^- = 1$$

$$y_1, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \in \{0,1\}$$

2. **11.3-3, p. 536**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4 + M(1 - y_1)$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 3 + My_1$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 + M(1 - y_2)$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 10 + M(1 - y_3)$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 + M(1 - y_4)$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10 + M(1 - y_5)$$

$$y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0,1\}$$





c. On introduit les variables binaires suivantes :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \geq j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Objectif :

$$\max Z = -y_{11} + 3y_{12} + 2y_{13} + y_{21} + 4y_{22} + y_{31} + 2y_{32} + 2y_{33} + y_{34} + y_{35}$$

Contraintes :

$$0.2(y_{11} + y_{12} + y_{13}) + 0.4(y_{21} + y_{22}) + 0.2(y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35}) \leq 1$$

$$y_{11} \geq y_{12}$$

$$y_{12} \geq y_{13}$$

$$y_{21} \geq y_{22}$$

$$y_{31} \geq y_{32}$$

$$y_{32} \geq y_{33}$$

$$y_{33} \geq y_{34}$$

$$y_{34} \geq y_{35}$$

$$y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}, y_{35} \in \{0,1\}$$

d. Voir le fichier *TP6\_4d.xls*

## TP6\_4d

Nombre d'unités	1	2	3	4	5	Capacité utilisée
<b>Profit produit 1</b>	-1	2	4			0,2
<b>Profit produit 2</b>	1	5				0,4
<b>Profit produit 3</b>	1	3	5	6	7	0,2
<b>Profit incrément 1</b>	-1	3	2			
<b>Profit incrément 2</b>	1	4				
<b>Profit incrément 3</b>	1	2	2	1	1	
						<b>Total produit</b>
<b>Production produit 1?</b>	0	>= 0	>= 0			0
<b>Production produit 2?</b>	0	>= 0				0
<b>Production produit 3?</b>	1	>= 1	>= 1	>= 1	>= 1	5
						<b>Capacité totale</b>
<b>Profit total</b>	<b>Max</b>					7
						<b>Capacité limite</b>
						1 <= 1

Noms d'intervalles	Cellules
Capacité_utilisée	L5:L7
Nombre_unités	C3:K3
Production_produits	C13:K15
Profit_produits	C5:K7
Profit_incrément	C9:K11
Profit_total	C18
Capacité_totale	L18
Capacité_limite	N18
Total_produit	L13:L15

Une solution optimale est :  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5$ .

5. **11.4-7, p. 538**

Variables :

$x_{ij} = 1$ , si le quartier  $j$  est affecté à une station d'incendie localisée dans le quartier  $i$ ; 0, sinon

Objectif :

Posons  $a_{ij}$  = temps de réponse pour un incendie dans le quartier  $j$ , étant donné que le feu est traité par la station localisée dans le quartier  $i$

Posons  $f_j$  = fréquence des incendies dans le quartier  $j$

L'objectif s'écrit alors :

$$\min Z = \sum_{j=1}^5 f_j \sum_{i=1}^5 a_{ij} x_{ij}$$

Contraintes :

1. On doit installer 2 stations (alternatives mutuellement exclusives)

$$\sum_{i=1}^5 x_{ii} = 2$$

2. Chaque quartier doit être affecté à une station (alternatives mutuellement exclusives)

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,4,5$$

3. Une station dans le quartier  $i$  ne peut être affectée au quartier  $j$  que si elle effectivement installée dans le quartier  $i$  (décisions contingentes)

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \quad i, j = 1,2,3,4,5$$

4. Les variables sont binaires

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = 1,2,3,4,5$$

6. **11.4-8, p.539**

a. Variables :

$x_j = 1$ , si une station d'incendie est installée dans le quartier  $j$ ; 0, sinon

Objectif :

$$\min 200x_1 + 250x_2 + 400x_3 + 300x_4 + 500x_5$$

Contraintes :

$$x_1 + x_3 + x_5 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_4 \geq 1$$

$$x_2 + x_3 + x_5 \geq 1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4,5$$

- b. C'est un problème de recouvrement d'ensemble. Les objets (l'ensemble  $I$  correspondant aux contraintes) sont les quartiers, et la collection de sous-ensembles d'objets (l'ensemble  $J$  correspondant aux variables) est constituée des quartiers où sont installées des stations d'incendie. Pour chaque quartier  $i$  (chaque contrainte  $i$ ), l'ensemble  $J_i$  (sous-ensemble de  $J$  contenant  $i$ ) est constitué des quartiers où sont installées des stations d'incendie qui peuvent répondre à temps à un incendie dans le quartier  $i$ .
- c. Voir le fichier *TP6\_6.xls*

### TP6\_6

Quartier	1	2	3	4	5			
Coût	200	250	400	300	500			
						Terme de gauche		Terme de droite
Quartier 1	1	0	1	0	1	1	>=	1
Quartier 2	1	1	0	1	0	2	>=	1
Quartier 3	0	1	1	0	1	1	>=	1
Quartier 4	0	1	1	1	1	1	>=	1
Quartier 5	1	0	1	0	1	1	>=	1
Station installée	1	1	5E-32	0	0			
						Min		
Coût total						450		

  

Noms d'intervalles	Cellules
Coût	C4:G4
Coût_total	C14
Station_installée	C12:G12
Stations_quartier	C7:G11
Terme_droite	J7:J11
Terme_gauche	H7:H11

Une solution optimale est :  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ .