

1. 11.6-6, p. 540

- a. Faux. C'est plutôt l'inverse : le domaine réalisable de la relaxation PL contient le domaine réalisable du domaine en nombres entiers (les points entiers contenus dans le domaine réalisable de la relaxation PL).
- b. Vrai. Tous les points entiers qui nous intéressent sont inclus dans le domaine réalisable de la relaxation PL. Donc, si une solution optimale de la relaxation PL est entière, les autres points entiers ne peuvent être meilleurs!
- c. Faux. On en a vu un exemple au cours et on en verra un autre à l'exercice 3.

2. 11.6-2, p. 540

En utilisant IOR Tutorial (domaine « Integer Programming »), on entre d'abord le modèle :

Number of binary (0-1) variables:

Number of general integer variables:

Number of continuous variables:

Number of functional constraints:

(To make a new number above take effect, you must press the ENTER key.)

Max x1 + x2 + x3 + x4 + x5

x1 + x2 + x3 + x4 + x5

x1 + x2 + x3 + x4 + x5

x1 + x2 + x3 + x4 + x5

x1 = (0,1), x2 = (0,1), x3 = (0,1), x4 = (0,1), x5 = (0,1)

Notez que nous avons entré l'objectif sous forme de maximisation (en prenant l'opposé de chaque paramètre dans l'objectif), ce qui permettra de résoudre le problème avec la méthode vue au cours (qui est celle implantée dans IOR Tutorial). Une fois la solution optimale identifiée, il ne faut pas oublier de prendre l'opposé de la valeur optimale obtenue pour avoir la vraie valeur optimale!

On choisit ensuite l'option « Solve Binary Integer Program Interactively ». L'écran suivant apparaît, nous fournissant la solution optimale de la relaxation PL à la racine de l'arbre des solutions :

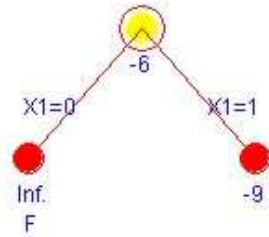


LP - Relaxation Optimal Solution: (0,5, 0, 0,5, 0, 0), Z = -6.

Incumbent

Fathomed

Cette solution n'étant pas entière, on doit brancher sur une variable. Ici, on choisit la prochaine variable non fixée, soit x_1 (en fait, IOR Tutorial ne nous donne pas le choix). Après avoir double-cliqué sur la racine, l'écran suivant apparaît :

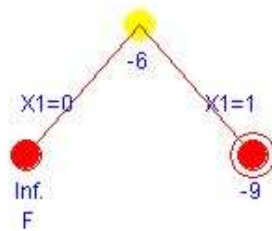


LP - Relaxation Optimal Solution: (0,5, 0, 0,5, 0, 0), Z = -6.

Incumbent

Fathomed

Pour le sommet correspondant à $x_1 = 0$, le domaine réalisable de la relaxation PL est vide : il n'y a donc aucune solution entière dans ce domaine, et on peut donc élaguer (ou F, pour « fathomed ») ce sommet. En cliquant sur l'autre sommet, on obtient la solution de la relaxation PL :

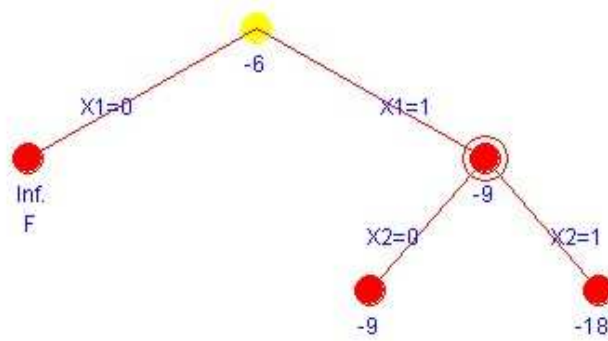


LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 0, 0,67, 0, 0), Z = -9,67.

Incumbent

Fathomed

La valeur optimale de la relaxation PL est égale à -9.67; en arrondissant cette borne supérieure à l'entier immédiatement inférieur, on obtient une borne supérieure égale à -10 (et non -9, comme le montre l'écran de IOR Tutorial; *notez que cette erreur n'apparaîtrait pas si on maximisait avec des coefficients positifs*). Puisqu'on n'a pas encore identifié de meilleure solution réalisable (ou « incumbent »), on doit brancher sur ce sommet. IOR Tutorial choisit la prochaine variable non fixée, soit x_2 , et l'écran suivant apparaît :

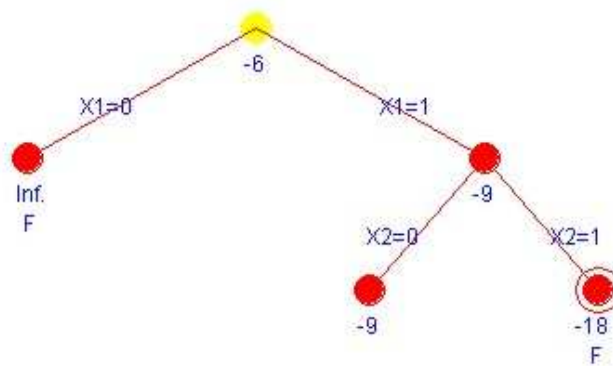


LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 0, 0,67, 0, 0), Z = -9,67.

Incumbent

Fathomed

On examine ensuite à tour de rôle chacun des nouveaux sommets ainsi générés pour appliquer les tests d'élagage. Au sommet correspondant à $x_2 = 0$, aucun test d'élagage ne s'applique. Par contre, au sommet correspondant à $x_2 = 1$, la relaxation PL fournit une solution optimale entière, et le test 3 s'applique. De plus, on met à jour la meilleure solution courante, puisque c'est la première solution entière rencontrée :



LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 1, 1, 0, 0), Z = -18.

Incumbent

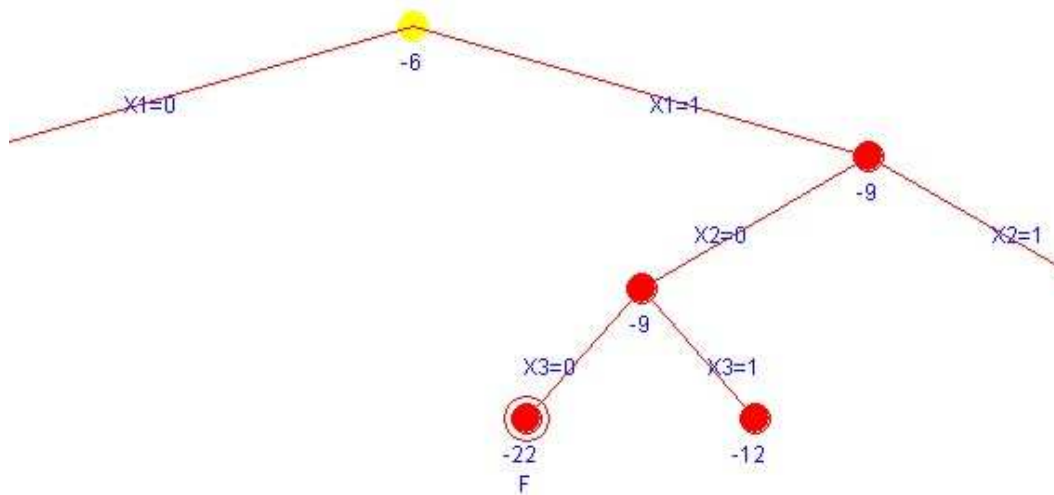
Fathomed

Incumbent:

$X = (1, 1, 1, 0, 0)$

$Z^* = -18$

Le seul nœud non encore élagué est celui correspondant au sommet $x_2 = 0$. Une fois effectué le branchement sur la variable x_3 , on examine chacun des sous-problèmes créés et on teste les critères d'élagage. Pour le sous-problème correspondant à $x_3 = 0$, la solution obtenue est entière et de valeur -22. Puisque cette solution est de valeur moindre que celle de la meilleure solution courante, on élague ce sommet, mais sans mettre à jour la meilleure solution courante :



LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 0, 0, 1, 1), Z = -22.

Incumbent

Fathomed

Incumbent:

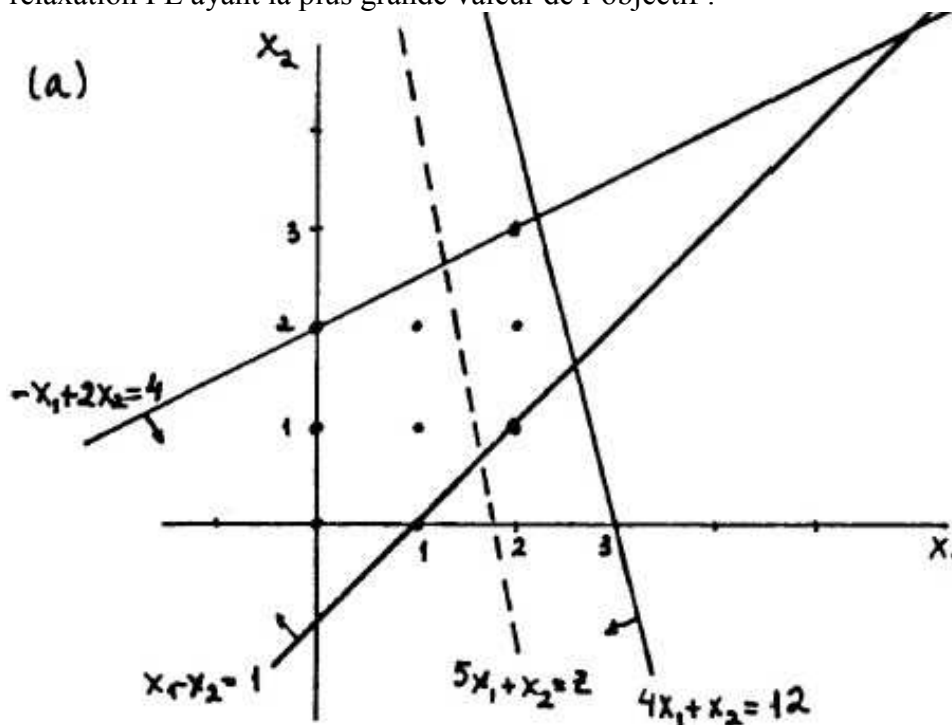
$X = (1, 1, 1, 0, 0)$

$Z^* = -18$

Pour le sommet correspondant à $x_3 = 1$, on obtient une solution entière de valeur -12, qui est donc supérieure à la valeur de la meilleure solution connue : ce sommet peut donc être élagué et on met à jour la meilleure solution connue :

3. 11.5-1, p. 539

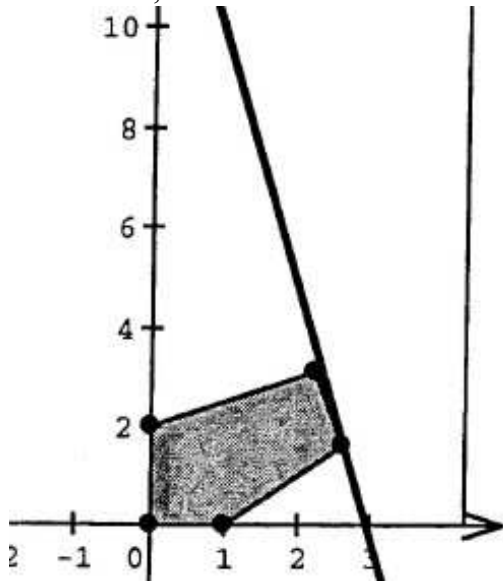
- a. La solution optimale est le point (2,3) de valeur 13, qui est le point entier dans le domaine de la relaxation PL ayant la plus grande valeur de l'objectif :



- b. La solution optimale de la relaxation PL est le point $(13/5, 8/5)$ de valeur $13+8/5$. La solution entière la plus près est $(3,2)$, qui n'est pas réalisable comme on peut le voir sur le graphique. Voici toutes les solutions possibles pouvant être obtenues en arrondissant (vers le haut ou vers le bas) chacune des valeurs non entières dans la solution optimale de la relaxation PL :
- $(3,2)$: non réalisable;
 - $(3,1)$: non réalisable;
 - $(2,2)$: réalisable de valeur 12;
 - $(2,1)$: réalisable de valeur 11.
- Aucune de ces solutions ne correspond à la solution optimale.

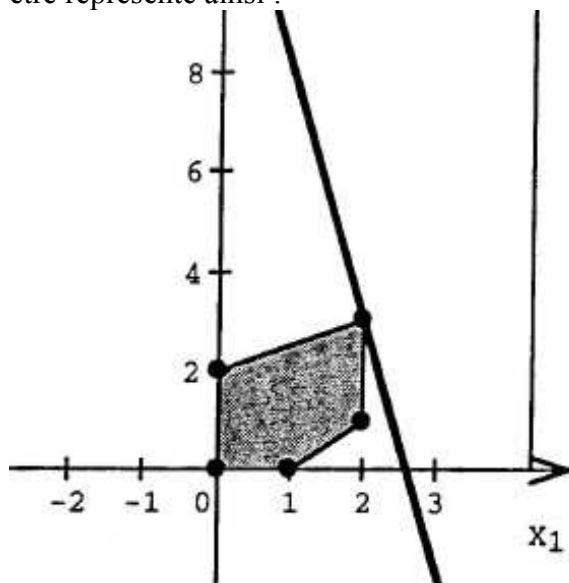
4. 11.7-3, p. 541

a. A la racine, le domaine réalisable de la relaxation PL peut être représenté ainsi :



La solution optimale est $(13/5, 8/5)$ de valeur $13+8/5$. La meilleure borne supérieure connue est donc 14.

On branche sur x_1 , qui est la première variable à valeur non entière dans la solution optimale de la relaxation PL. Les deux sommets créés correspondent à l'ajout des contraintes $x_1 \leq 2$ et $x_1 \geq 3$. Pour le premier sommet, correspondant à $x_1 \leq 2$, le domaine réalisable de la relaxation PL peut être représenté ainsi :



La solution optimale est $(2,3)$ de valeur 13. Puisque cette solution est entière, le sommet est élagué. De plus, c'est la première solution entière rencontrée, donc elle devient la meilleure solution courante.

Pour le second sommet, correspondant à $x_1 \geq 3$, le domaine réalisable de la relaxation PL est vide. On peut donc élaguer ce sommet.

Puisqu'il n'y a plus de sommets non élagués, l'algorithme se termine. La solution optimale est $(2,3)$ de valeur 13.

b. On entre d'abord le modèle dans IOR Tutorial :

Number of binary (0-1) variables:

Number of general integer variables:

Number of continuous variables:

Number of functional constraints:

When a new number above take effect, you must press the ENT

Max x1 + x2

x1 + x2

x1 + x2

x1 + x2

x1 = (0, 1, ...), x2 = (0, 1, ...)

Ensuite, on choisit l'option « Solve Mixed Integer Program Interactively ». On obtient alors l'écran suivant :

14,6

LP - Relaxation Optimal Solution: (2,6, 1,6), Z = 14,6.

Incumbent

Fathomed

La solution optimale de la relaxation PL n'est pas entière. On branche donc sur la prochaine variable à valeur non entière, soit x_j . Ici, IOR Tutorial nous donne le choix de la variable de branchement, de même que des contraintes à ajouter pour définir chaque sommet :

14,6



IORTutorial

Enter the subscript for the branching variable, and then enter the bounds for this variable for the two new sub-problems.

X subscript: 1
Left Bound: 2
Right Bound: 3

OK Cancel

LP - Relaxation Optimal Solution: (2,6, 1,6), Z = 14,6.

Incumbent

Fathomed

Une fois le branchement effectué, on obtient que le sommet de droite ($x_1 \geq 3$) est immédiatement élagué, car le domaine réalisable est vide. En examinant le sommet de gauche ($x_1 \leq 2$), on obtient une solution optimale de la relaxation PL à valeur entière. On peut donc élaguer ce sommet et mettre à jour la meilleure solution courante :

5. 11.7-6, p. 541

- a. On introduit les variables entières suivantes :
 x_i = nombre de quarts d'unités à fabriquer du produit i , $i=1,2$

Le modèle s'écrit alors ainsi :

$$\max Z = 4x_1 + 2,5x_2$$

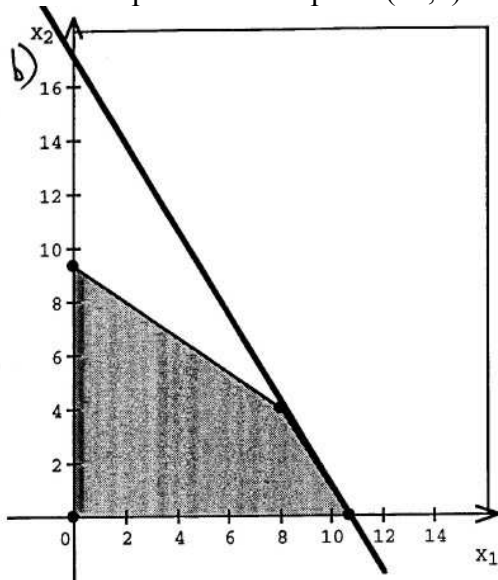
$$0,75x_1 + 0,5x_2 \leq 8$$

$$0,5x_1 + 0,75x_2 \leq 7$$

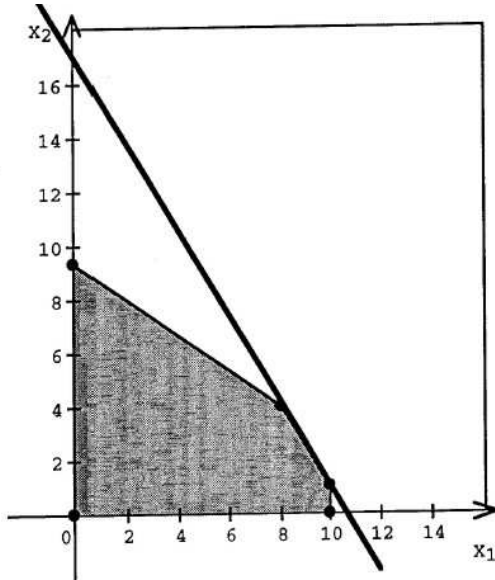
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ entier}$$

- b. La solution optimale est le point (10,1) de valeur optimale 42,5 :



- c. A la racine, le domaine réalisable de la relaxation PL correspond au graphique identifié en b. Sa solution optimale est le point $(10+2/3, 0)$ de valeur $42+2/3$. Cette solution n'étant pas entière, on branche sur la première variable à valeur non entière, soit x_1 . Les sommets générés correspondent à l'ajout des contraintes $x_1 \leq 10$ et $x_1 \geq 11$.
Pour le premier sommet, correspondant à $x_1 \leq 10$, le domaine réalisable de la relaxation PL peut être représenté ainsi :



La solution optimale est $(10,1)$ de valeur 42,5. Puisque cette solution est entière, le sommet est élagué. De plus, c'est la première solution entière rencontrée, donc elle devient la meilleure solution courante.

Pour le second sommet, correspondant à $x_1 \geq 11$, le domaine réalisable de la relaxation PL est vide. On peut donc élaguer ce sommet.

Puisqu'il n'y a plus de sommets non élagués, l'algorithme se termine. La solution optimale est $(10,1)$ de valeur 42.5.

