

1. 24-3, p. 24-39

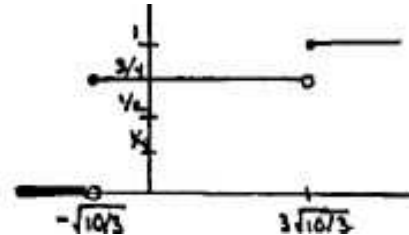
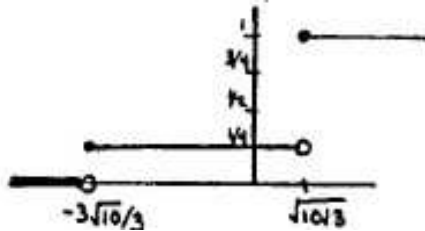
- a. Voir tableau ci-dessous
- b. Voir tableau ci-dessous
- c. Voir tableau ci-dessous

$\Omega$	X	$P(\omega \in \Omega)$
(G,G)	4	1/4
(G,M)	3	1/6
(G,B)	2	1/12
(M,G)	3	1/6
(M,M)	2	1/9
(M,B)	1	1/18
(B,G)	2	1/12
(B,M)	1	1/18
(B,B)	0	1/36

- d.  $X \in \{0,1,2,3,4\}$   
 $P_X(0) = P(X=0) = 1/36$   
 $P_X(1) = P(X=1) = 1/18 + 1/18 = 1/9$   
 $P_X(2) = P(X=2) = 1/12 + 1/9 + 1/12 = 5/18$   
 $P_X(3) = P(X=3) = 1/6 + 1/6 = 1/3$   
 $P_X(4) = P(X=4) = 1/4$   
 $P_X(k) = P(X=k) = 0, k \neq 0,1,2,3,4$
- e.  $E(X) = 0.1/36 + 1.1/9 + 2.5/18 + 3.1/3 + 4.1/4 = 2 \frac{2}{3}$

2. 24-5, p. 24-39

- a.  $E(X) = 0 = x_1 \cdot 1/4 + x_2 \cdot 3/4 \rightarrow x_1 = -3x_2$   
 $\sigma^2(X) = 10 = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = x_1^2 \cdot 1/4 + x_2^2 \cdot 3/4 \rightarrow 10 = x_2^2 \cdot 9/4 + x_2^2 \cdot 3/4 = 3x_2^2 \rightarrow$   
 $x_2 = \pm \sqrt{10/3}$  et  $x_1 = \pm 3\sqrt{10/3}$
- b. La fonction de répartition de X peut prendre l'une des deux formes suivantes :



3. 24-6, p. 24-39

- a.  $P(X \geq 250) = 1 - P(X < 250) = 1 - \int_0^{250} f_X(x) dx = 1 - \int_{100}^{250} 100/x^2 dx = 1 - (-100/y)_{100}^{250} = 2/5$
- b.  $E(X) = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{100}^{\infty} x(100/x^2) dx = \int_{100}^{\infty} (100/x) dx = 100(\ln \infty - \ln 100) = \infty$

4. 16.2-2, p. 760

- a. On définit le processus stochastique suivant, où l'indice  $t$  représente deux jours consécutifs :

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier et aujourd'hui} \\ 1 & \text{si le prix de l'action a augmenté aujourd'hui, mais pas hier} \\ 2 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier, mais pas aujourd'hui} \\ 3 & \text{si le prix de l'action n'a pas augmenté, ni hier, ni aujourd'hui} \end{cases}$$

La matrice de transition de cette chaîne de Markov (voir explications en b) est :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 1-\alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1-\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 1-\alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 1-\alpha_4 \end{bmatrix}$$

- b. De cette façon, on définit l'ensemble des états possibles et on vérifie la propriété markovienne : la probabilité associée à un état au temps  $t+1$  (demain, aujourd'hui) dépend alors uniquement de l'état au temps  $t$  (aujourd'hui, hier). De plus, puisque le temps  $t+1$  correspond à (demain, aujourd'hui) et que le temps  $t$  correspond à (aujourd'hui, hier), on en déduit qu'on ne peut passer : de l'état 0 au temps  $t$  à l'état 1 ou à l'état 3 au temps  $t+1$ , de l'état 1 au temps  $t$  à l'état 1 ou à l'état 3 au temps  $t+1$ , ...

5. 16.2-3, p. 760

On peut formuler ce problème comme une chaîne de Markov en définissant le processus stochastique suivant, où l'indice  $t$  représente trois jours consécutifs :

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le prix de l'action a augmenté avant - hier, hier et aujourd'hui} \\ 1 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier et aujourd'hui, mais pas avant - hier} \\ 2 & \text{si le prix de l'action a augmenté avant - hier et aujourd'hui, mais pas hier} \\ 3 & \text{si le prix de l'action a augmenté aujourd'hui, mais ni hier, ni avant - hier} \\ 4 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier et avant - hier, mais pas aujourd'hui} \\ 5 & \text{si le prix de l'action a augmenté hier, mais ni aujourd'hui, ni avant - hier} \\ 6 & \text{si le prix de l'action a augmenté avant - hier, mais ni hier, ni aujourd'hui} \\ 7 & \text{si le prix de l'action n'a pas augmenté ni avant - hier, ni hier, ni aujourd'hui} \end{cases}$$

De cette façon, on définit l'ensemble des états possibles et on vérifie la propriété markovienne : la probabilité associée à un état au temps  $t+1$  (demain, aujourd'hui, hier) dépend alors uniquement de l'état au temps  $t$  (aujourd'hui, hier, avant-hier). De plus, on peut déduire qu'à partir de l'état 0 au temps  $t$ , on ne peut passer qu'à l'état 0 ou à l'état 5 au temps  $t+1$ , qu'à partir de l'état 1 au temps  $t$ , on ne peut passer qu'à l'état 0 ou à l'état 4 au temps  $t+1$ , ...

Par contre, le processus stochastique défini au numéro précédent ne vérifie pas ici la propriété markovienne, car la probabilité associée à un état au temps  $t+1$  (demain, aujourd'hui) dépend alors des états au temps  $t$  (aujourd'hui, hier) et au temps  $t-1$  (hier, avant-hier).

6. 17-2.3, p. 819

- a. Ce terrain de stationnement peut être modélisé comme une file d'attente : les clients sont les voitures et les serveurs sont les espaces de stationnement. Le temps de service correspond au temps passé par une voiture dans un espace de stationnement. La capacité de la file est 0, car ou bien une voiture peut se garer ou bien elle ne peut pas, auquel cas elle n'entre pas dans le système.
- b. Mesures de performance :
- $L$  = nombre moyen de clients dans le système = nombre moyen de voitures dans le terrain de stationnement =  $0.0,2 + 1.0,3 + 2.0,3 + 3.0,2 = 1,5$  voiture
- $L_q$  = nombre moyen de clients en attente dans la file = nombre moyen de voitures en attente d'un espace = 0 voiture
- $W$  = temps moyen passé dans le système = temps moyen durant lequel une voiture demeure dans un espace de stationnement =  $L/\lambda = 1,5/2 = 0,75$  heure
- $W_q$  = temps moyen passé en attente dans la file = temps moyen en attente d'un espace = 0 heure
- c. D'après b, le temps moyen durant lequel une voiture demeure dans un espace de stationnement est 0,75 heure = 45 minutes

7. 17-2.4, p. 819

- a. Faux. La file d'attente est là où les clients attendent avant que leur service ne débute.
- b. Faux. Les modèles de file d'attente supposent habituellement que le nombre de clients dans la file est infini.
- c. Vrai. La stratégie de service la plus courante est premier arrivé, premier servi.

8. 17-2.8, p. 820

- a. On considère un modèle G/G/1 : 1 serveur et des lois de probabilité quelconques (Générales) pour le temps interarrivée et le temps de service. Notons alors  $P_0$  la probabilité qu'il n'y ait aucun client dans le système. Puisqu'il n'y a qu'un seul serveur, le nombre moyen de clients dans le système  $L$  est donné par :  $L_q$ , lorsqu'il n'y a aucun client dans le système;  $L_q + 1$ , lorsqu'il y a au moins un client dans le système ( $L_q$  est le nombre moyen de clients en attente dans la file). On a donc :
- $$L = P_0 L_q + (1 - P_0) (L_q + 1) = L_q + (1 - P_0)$$
- b. On définit  $\rho = \lambda/\mu$  = facteur d'utilisation = fraction de la capacité de service du système ( $\mu$ ) qui est utilisée en moyenne par les clients arrivant dans le système ( $\lambda$ ) = fraction du temps pendant lequel le serveur est occupé. Normalement, on doit avoir  $\rho < 1$ , sinon la file d'attente croît indéfiniment. On introduit aussi  $W$  = temps moyen passé dans le système = temps moyen passé en attente dans la file + temps moyen passé à être servi =  $W_q + 1/\mu$
- On a alors :  $L = \lambda W = \lambda(W_q + 1/\mu) = \lambda W_q + \lambda/\mu = L_q + \rho$
- c.  $L = L_q + \rho = L_q + (1 - P_0)$  par b et a, d'où  $\rho = (1 - P_0)$ . On peut interpréter ce résultat ainsi :  $\rho$  représente la fraction du temps pendant lequel le serveur est occupé. Or, le serveur est toujours occupé sauf lorsqu'il n'y a aucun client dans le système, et  $P_0$  est justement la probabilité qu'il n'y ait aucun client dans le système.