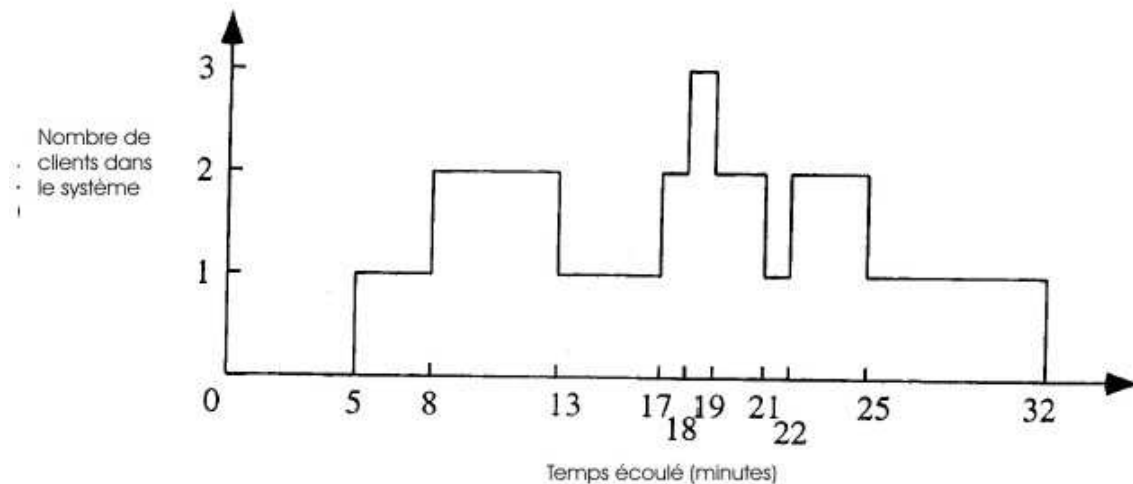


1. 20.1-4, p. 994

a. Voici l'ensemble des données du problème et ce qu'on peut en tirer lorsqu'il y a un commis :

Client	Temps d'arrivée	Temps de service	Temps de départ	Temps dans le système	Temps d'attente
1	5	8	13	8	0
2	8	6	19	11	5
3	17	2	21	4	2
4	18	4	25	7	3
5	22	7	32	10	3

Voici un graphique montrant l'évolution du nombre de clients dans le temps lorsqu'il n'y a qu'un seul commis :



b.  $P_n$  = probabilité qu'il y ait n clients dans le système

$$P_0 = 5/32 = 0,156$$

$$P_1 = (3 + 4 + 1 + 7)/32 = 0,469$$

$$P_2 = (5 + 1 + 2 + 3)/32 = 0,344$$

$$P_3 = 1/32 = 0,031$$

$$L = \text{nombre moyen de clients dans le système} = \sum_{n=0}^3 nP_n = 0.0,156 + 1.0,469 + 2.0,344 + 3.0,031 =$$

1,25 client

$$L_q = \text{nombre moyen de clients en attente dans la file} = \sum_{n=1}^3 (n-1)P_n \text{ (puisque'on exclut le cas où un}$$

client est en train d'être servi) = (1-1).0,469 + (2-1).0,344 + (3-1).0,031 = 0,406 client

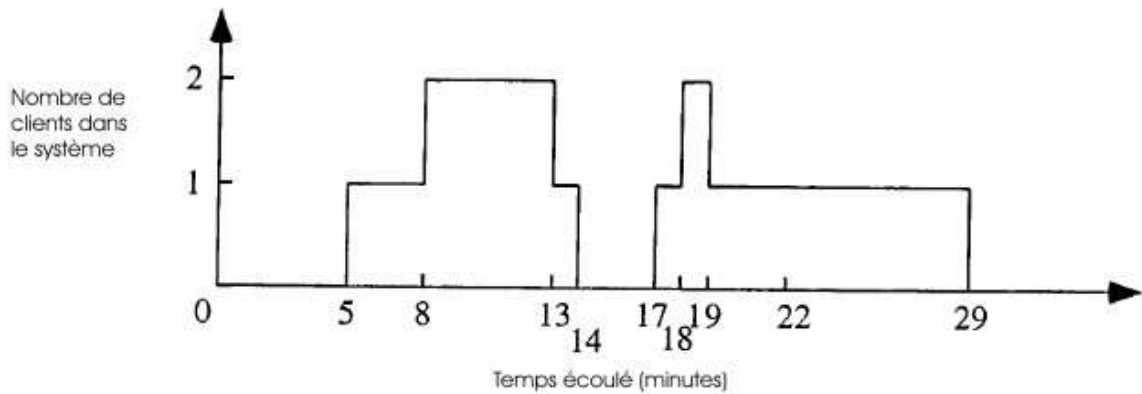
$W_q$  = temps moyen passé en attente dans la file = somme des temps d'attente observés/nombre de clients = (0+5+2+3+3)/5 = 13/5 = 2,6 minutes

$W$  = temps moyen passé dans le système = somme des temps passés dans le système/ nombre de clients = (8+11+4+7+10)/5 = 40/5 = 8 minutes

c. Voici un tableau représentant les données lorsqu'il y a deux commis :

Client	Temps d'arrivée	Temps de service	Temps de départ	Temps dans le système	Temps d'attente
1	5	8	13	8	0
2	8	6	14	6	0
3	17	2	19	2	0
4	18	4	22	4	0
5	22	7	29	7	0

Voici un graphique montrant l'évolution du nombre de clients dans le temps lorsqu'il y a deux commis :



d.  $P_n$  = probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans le système

$$P_0 = (5 + 3)/29 = 0,276$$

$$P_1 = (3 + 1 + 1 + 10)/29 = 0,517$$

$$P_2 = (5 + 1)/29 = 0,207$$

$$L = \text{nombre moyen de clients dans le système} = \sum_{n=0}^2 nP_n = 0.0,276 + 1.0,517 + 2.0,207 = 0,931$$

client

$$L_q = \text{nombre moyen de clients en attente dans la file} = \sum_{n=2}^2 (n-2)P_n = (2-2).0,207 = 0 \text{ client}$$

$$W_q = \text{temps moyen passé en attente dans la file} = \text{somme des temps d'attente observés}/\text{nombre de clients} = (0+0+0+0+0)/5 = 0 \text{ minute}$$

$$W = \text{temps moyen passé dans le système} = \text{somme des temps passés dans le système}/\text{nombre de clients} = (8+6+2+4+7)/5 = 27/5 = 5,4 \text{ minutes}$$

2. 10.2-1, p. 472

- a. Les sommets peuvent être divisés en quatre « couches » : les sommets de la couche  $n$  sont accessibles à partir de l'origine seulement à partir des sommets de la couche  $n-1$ .

Étape  $n =$  « couche » dans le réseau

État  $s_n =$  sommet

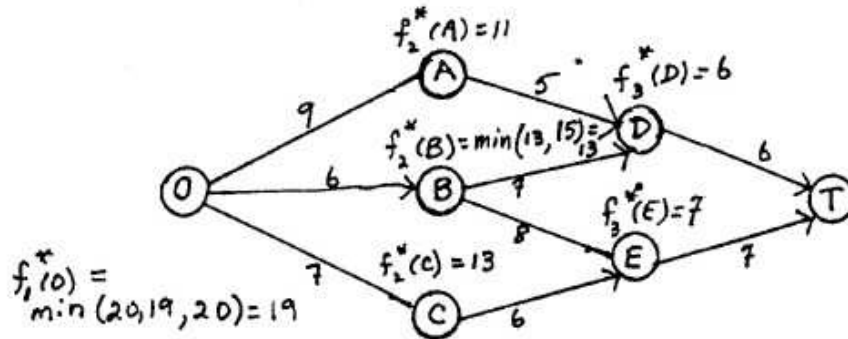
Décision  $x_n =$  destination à partir de l'état  $s_n$

$c_{ij} =$  distance entre les sommets  $i$  et  $j$

$f_n^*(s_n) = \min (c_{s_n x_n} + f_{n+1}^*(x_n))$

$f_4^*(T) = 0$

- b. Voici le graphe



La solution optimale (le plus court chemin) est : O-B-D-T

- c. Pour  $n = 3$  :

$s_3$	$x_3 = T$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
D	6	6	T
E	7	7	T

Pour  $n = 2$  :

$s_2$	$x_2 = D$	$x_2 = E$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
A	11	-	11	D
B	13	15	13	D
C	-	13	13	E

Pour  $n = 1$  :

$s_1$	$x_1 = A$	$x_1 = B$	$x_1 = C$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
O	20	19	20	19	B

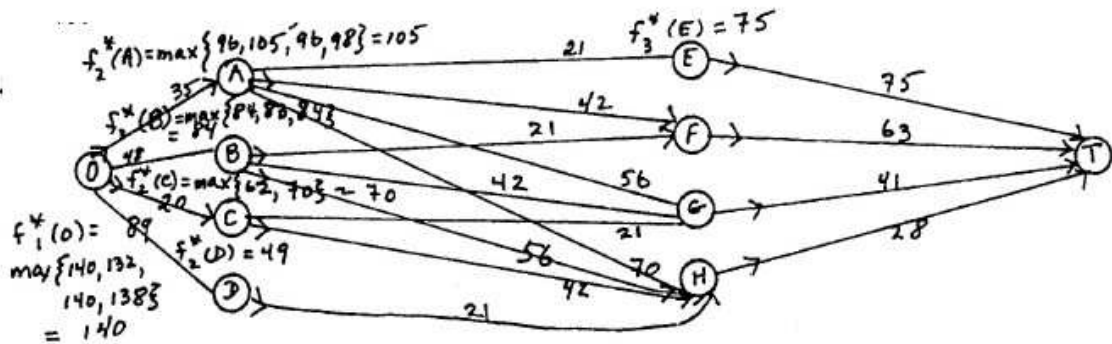
d. On applique l'algorithme de Dijkstra :

$i$ marqués relié à $j$ non marqué	$j$ non marqué le plus près	Dist	Dist min	$j$ le plus près	$p(j)$
O	B	6	6	B	O
O	C	7	7	C	O
B	D	13			
O	A	9	9	A	O
B	D	13			
C	E	13			
A	D	14			
B	D	13	13	D	B
C	E	13	13	E	C
D	T	19	19	T	D
E	T	20			

Avec Dijkstra, on peut montrer qu'il y a 8 sommes et 6 comparaisons, alors que la programmation dynamique effectue 7 sommes et 3 comparaisons.

### 3. 10.2-2, p. 473

a. Voici le graphe :



Solutions optimales :

O-A-F-T : 1 vendeur pour la région 1, 2 vendeurs pour la région 2 et 3 vendeurs pour la région 3

O-C-H-T : 3 vendeurs pour la région 1, 2 vendeurs pour la région 2 et 1 vendeur pour la région 3

b. Étape  $n =$  région  $n$

État  $s_n =$  nombre de vendeurs encore à affecter à l'étape  $n$

Décision  $x_n =$  nombre de vendeurs affectés à l'étape  $n$

$c_n(x_n) =$  accroissement des ventes dans la région  $n$  si  $x_n$  vendeurs sont affectés à la région  $n$

Pour  $n = 3$  :

$s_3$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
1	28	-	-	-	28	1
2	28	41	-	-	41	2
3	28	41	63	-	63	3
4	28	41	63	75	75	4

Pour  $n = 2$  :

$s_2$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
2	49	-	-	-	49	1
3	62	70	-	-	70	2
4	84	83	84	-	84	1,3
5	96	105	97	98	105	2

Pour  $n = 1$  :

$s_1$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
6	140	132	140	138	140	1,3

Solutions optimales :

1 vendeur pour la région 1, 2 vendeurs pour la région 2, 3 vendeurs pour la région 3  
 3 vendeurs pour la région 1, 2 vendeurs pour la région 2, 1 vendeur pour la région 3

4. 10.2-4, p. 474

- Faux. Selon le principe d'optimalité de Bellman, on détermine plutôt la politique optimale pour chaque état à l'étape  $n$ , par une relation de récurrence qui dépend de la politique optimale pour l'étape  $n+1$ .
- Faux. Toujours selon le principe d'optimalité de Bellman, la décision optimale pour cette étape et les suivantes a été déterminée par la procédure.
- Faux. Encore selon le principe d'optimalité de Bellman, la décision optimale à une étape donnée ne dépend pas des décisions prises aux étapes précédentes.

5. 10-3.2, p. 474

Étape  $n =$  cours  $n, n = 1,2,3,4$

État  $s_n =$  nombre de jours d'étude non encore affectés

Décision  $x_n =$  nombre de jours d'étude affecté au cours  $n$

$p_n(x_n) =$  nombre de points obtenus lorsque  $x_n$  jours d'étude sont affectés au cours  $n$

$f_n^*(x_n) = \max \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \mid 1 \leq x_n \leq \min(s_n, 4)\}$

On doit avoir  $f_5^*(0) = 0$  et  $s_4 - x_4 = 0$  (il est clair qu'on ne peut maximiser le nombre de points que si on utilise tous les jours d'étude).

Pour  $n = 4$  :

$s_4$	$x_4=1$	$x_4=2$	$x_4=3$	$x_4=4$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*$
1	6	-	-	-	6	1
2	-	7	-	-	7	2
3	-	-	9	-	9	3
4	-	-	-	9	9	4

Pour  $n = 3$  :

$s_3$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
2	8	-	-	-	8	1
3	9	10	-	-	10	2
4	11	11	13	-	13	3
5	11	13	14	14	14	3,4

Pour  $n = 2$  :

$s_2$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
3	13	-	-	-	13	1
4	15	13	-	-	15	1
5	18	15	14	-	18	1
6	19	18	16	17	19	1

Pour  $n = 1$  :

$s_1$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
7	22	23	21	20	23	2

La solution optimale est :

2 jours d'étude pour le cours 1, 1 jour d'étude pour le cours 2, 3 jours d'étude pour le cours 3 et 1 jour d'étude pour le cours 4

## 6. 10-3.17, p. 476

Étape  $n =$  variable  $x_n, n = 1,2,3$

État  $s_n = (R_1, R_2)_n =$  écarts dans les contraintes 1 et 2, resp.

$$f_3(s_3, x_3) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_3 = 0 \\ -1 + x_3, & \text{si } x_3 > 0 \end{cases}$$

$$f_3^*(s_3) = \max\{0, \max\{-1 + x_3 \mid 2x_3 \leq 6 - x_1 - 3x_2, x_3 \geq 0\}\}$$

$$f_2^*(s_2) = \max\{7x_2 + f_3^*(s_3) \mid 3x_2 \leq 6 - x_1, x_2 \leq 5 - x_1, x_2 \geq 0\}$$

$$f_1^*(s_1) = \max\{3x_1 + f_2^*(s_2) \mid x_1 \leq 6, x_1 \leq 5, x_1 \geq 0\}$$

$$s_1 = (6, 5), s_2 = (6 - x_1, 5 - x_1), s_3 = (6 - x_1 - 3x_2, 5 - x_1 - x_2)$$

On calcule d'abord  $x_3^*$  et  $f_3^*(s_3)$

Posons  $R_1^3 = 6 - x_1 - 3x_2$

$$f_3^*(s_3) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq R_1^3 \leq 2 \\ (R_1^3 / 2) - 1, & \text{si } R_1^3 > 2 \end{cases}$$

$$x_3^* = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq R_1^3 \leq 2 \\ R_1^3 / 2, & \text{si } R_1^3 > 2 \end{cases}$$

Calculons maintenant  $x_2^*$  et  $f_2^*(s_2)$

Posons  $R_1^2 = 6 - x_1$  et  $R_2^2 = 5 - x_1$

$$f_2(s_2, x_2) = 7x_2 + f_3^*(R_1^2 - 3x_2, R_2^2 - x_2)$$

$$f_2(s_2, x_2) = \begin{cases} 7x_2, & \text{si } 0 \leq R_1^2 - 3x_2 \leq 2 \\ 7x_2 + ((R_1^2 - 3x_2)/2) - 1, & \text{si } R_1^2 - 3x_2 > 2 \end{cases}$$

$$f_2^*(s_2) = \max\{f_2(s_2, x_2) \mid 0 \leq x_2 \leq \min\{R_1^2/3, R_2^2\}\}$$

Il y a deux cas :

1)  $R_1^2/3 \leq R_2^2 \Rightarrow x_2 = R_1^2/3 \geq (R_1^2 - 2)/3 \Rightarrow f_2^*(s_2) = 7R_1^2/3$

2)  $R_1^2/3 > R_2^2 \Rightarrow x_2 = R_2^2$  et il y a deux autres sous-cas :

a)  $R_2^2 < (R_1^2 - 2)/3 \Rightarrow f_2^*(s_2) = 7R_2^2 + ((R_1^2 - 3R_2^2)/2) - 1 = 11R_2^2/2 + R_1^2/2 - 1$

b)  $R_2^2 \geq (R_1^2 - 2)/3 \Rightarrow f_2^*(s_2) = 7R_2^2$

$$f_2^*(s_2) = \begin{cases} 7R_1^2/3, & \text{si } R_1^2/3 \leq R_2^2 \\ 7R_2^2, & \text{si } (R_1^2 - 2)/3 \leq R_2^2 < R_1^2/3 \\ 11R_2^2/2 + R_1^2/2 - 1, & \text{si } R_2^2 < (R_1^2 - 2)/3 \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} R_1^2/3, & \text{si } R_1^2/3 \leq R_2^2 \\ R_2^2, & \text{si } (R_1^2 - 2)/3 \leq R_2^2 < R_1^2/3 \\ R_2^2, & \text{si } R_2^2 < (R_1^2 - 2)/3 \end{cases}$$

Calculons enfin  $x_1^*$  et  $f_1^*(s_1)$

Posons  $R_1^1 = 6$  et  $R_2^1 = 5$

$$f_1(s_1, x_1) = 3x_1 + f_2^*(R_1^1 - x_1, R_2^1 - x_1)$$

$$f_1^*(s_1) = \max\{f_1(s_1, x_1) \mid 0 \leq x_1 \leq \min\{R_1^1, R_2^1\} = 5\}$$

Comme précédemment, il y a trois cas :

1)  $(R_1^1 - x_1)/3 \leq R_2^1 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 9/2 \Rightarrow f_1^*(s_1) = \max\{3x_1 + (7(6 - x_1))/3 \mid 0 \leq x_1 \leq 9/2\} = 17$  et  $x_1^* = 9/2$

2)  $(R_1^1 - x_1 - 2)/3 \leq R_2^1 - x_1 < (R_1^1 - x_1)/3 \Rightarrow 9/2 < x_1 \leq 11/2 \Rightarrow$

$$f_1^*(s_1) = \max\{3x_1 + 7(5 - x_1) \mid 9/2 < x_1 \leq 11/2\} = 17$$
 et  $x_1^* = 9/2$

3)  $R_2^1 - x_1 < (R_1^1 - x_1 - 2)/3 \Rightarrow x_1 > 11/2 \Rightarrow f_1^*(s_1) = \max\{3x_1 + (11(5 - x_1))/2 + (6 - x_1)/2 - 1 \mid x_1 > 11/2\} < 17$

La politique optimale est donc :

$$x_1^* = 9/2 \text{ dans le cas où } R_1^2/3 = (R_1^1 - x_1^*)/3 \leq R_2^2 - x_1 = R_2^2, \text{ ce qui donne}$$

$$x_2^* = R_1^2/3 = (R_1^1 - x_1^*)/3 = (6 - (9/2))/3 = 1/2$$

On a alors  $R_1^3 = 6 - x_1^* - 3x_2^* = 0$ , d'où  $x_3^* = 0$ .

La valeur optimale est 17.