

1. (25 points)

a. Variables :

x_1 = nombre de fenêtres avec un cadre en bois fabriquées par la compagnie

x_2 = nombre de fenêtres avec un cadre en aluminium fabriquées par la compagnie

Objectif : maximiser le profit quotidien total (en dizaines de dollars)

$$\max 6x_1 + 3x_2$$

Contraintes :

1. Limite sur le nombre de cadres en bois fabriqués par Denis

$$x_1 \leq 6$$

2. Limite sur le nombre de cadres en aluminium fabriqués par Linda

$$x_2 \leq 4$$

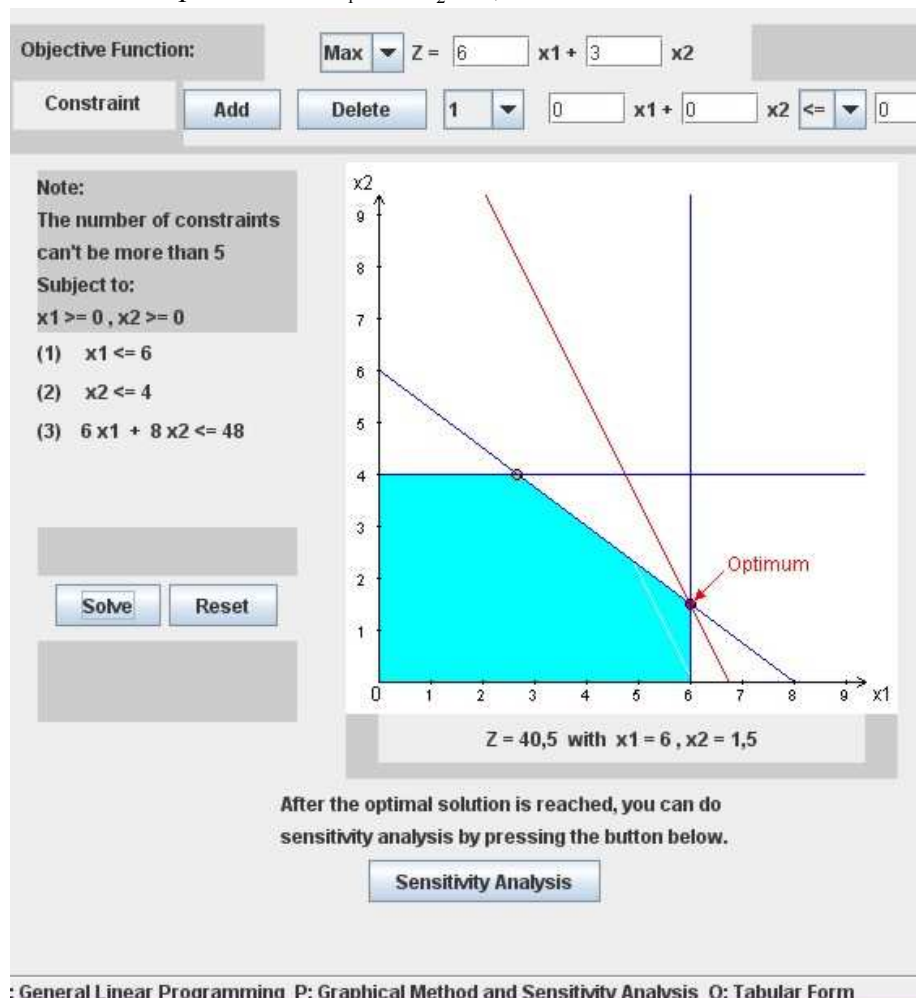
3. Limite sur la quantité de vitre fabriquée par Robert

$$6x_1 + 8x_2 \leq 48$$

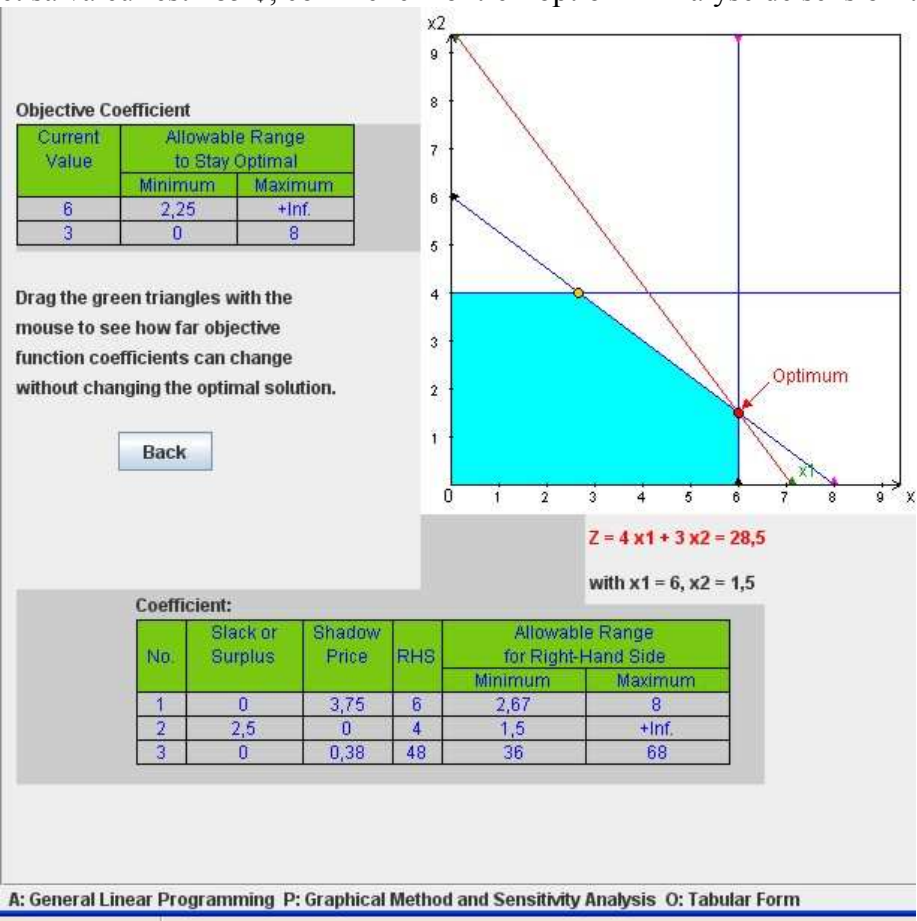
4. Quantités non négatives

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

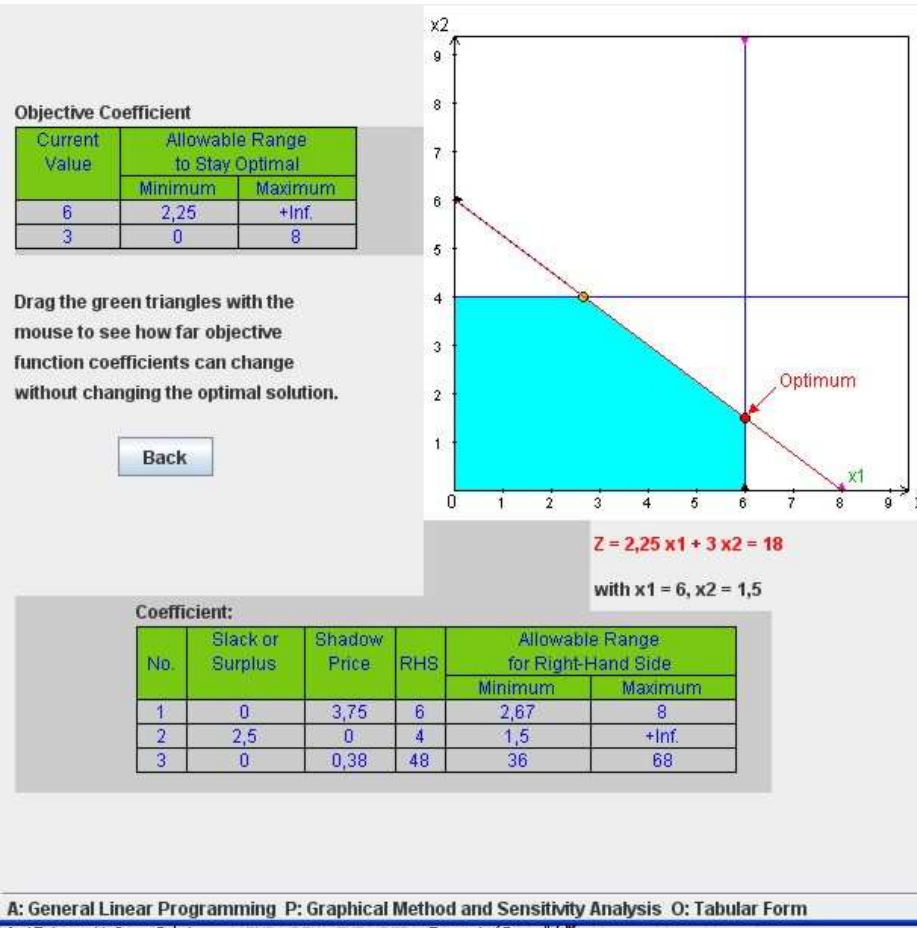
b. La solution optimale est $x_1 = 6$ $x_2 = 1,5$ de valeur 405 \$.



- c. Réduction du profit par fenêtre avec cadre en bois de 60 \$ à 40\$: la solution courante demeure optimale et sa valeur est 285 \$, comme le montre l'option « Analyse de sensibilité » de *IOR Tutorial*



Réduction du profit par fenêtre avec cadre en bois de 60 \$ à 20 \$: ici, l'option « Analyse de sensibilité » de *IOR Tutorial* nous permet d'affirmer que la solution courante demeure optimale pour toute valeur d'au moins 22.50 \$



Donc, on sait que la solution optimale change, mais on ne sait pas comment. Pour déterminer la nouvelle solution optimale, on revient à la méthode graphique en modifiant le coefficient de x_1 dans la fonction objectif. La nouvelle solution optimale est $x_1 = \frac{8}{3}$ $x_2 = 4$ de valeur $173\frac{1}{3}$ \$.

Objective Function:

Max $Z = 2x_1 + 3x_2$

Constraint

Add

Delete

1

0

x_1

0

x_2

\leq

0

Note:

The number of constraints can't be more than 5

Subject to:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

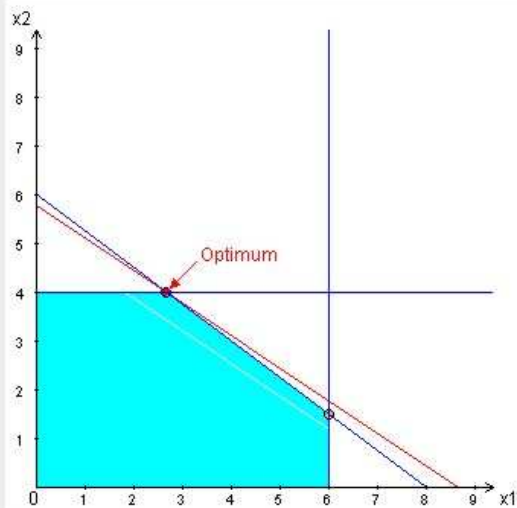
(1) $x_1 \leq 6$

(2) $x_2 \leq 4$

(3) $6x_1 + 8x_2 \leq 48$

Solve

Reset

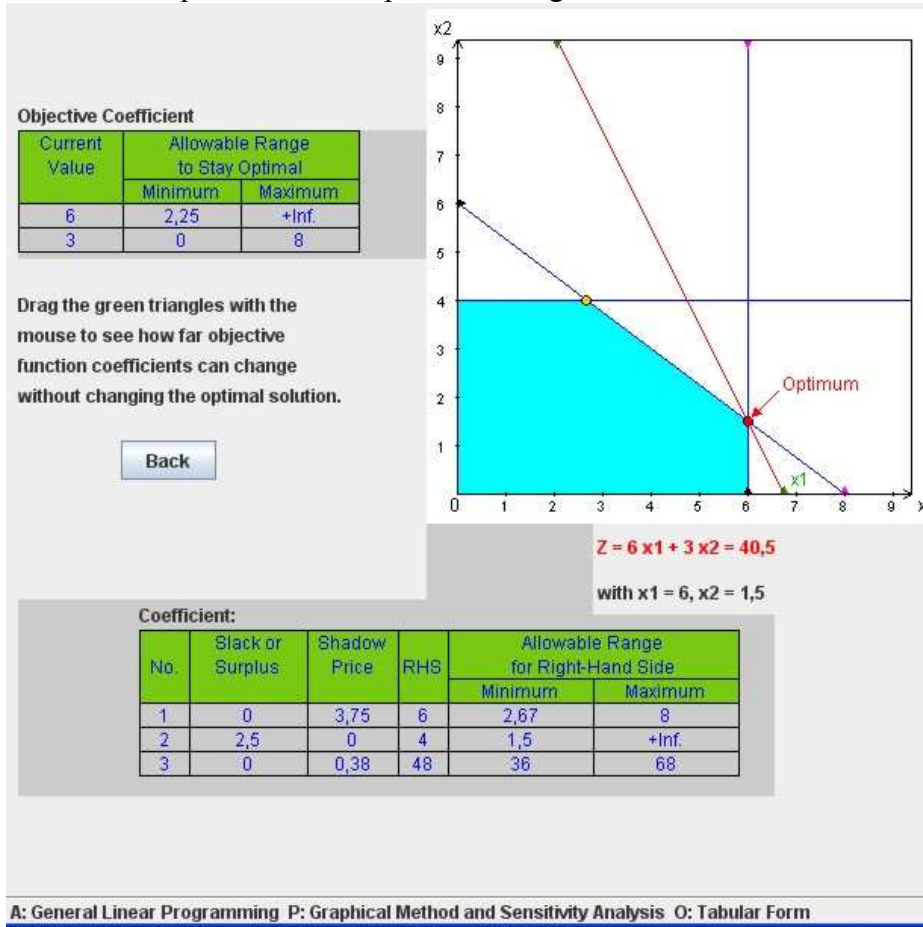


$Z = 17,33$ with $x_1 = 2,67, x_2 = 4$

After the optimal solution is reached, you can do sensitivity analysis by pressing the button below.

Sensitivity Analysis

- d. Réduction de la limite sur le nombre de cadres en bois fabriqués quotidiennement de 6 à 5 : ici, l'option « Analyse de sensibilité » nous montre que l'écart associé à la contrainte no. 1 (limite sur le nombre de cadres en bois) est 0 (on aurait pu aussi déduire cette information directement de la solution graphique); on en déduit que la solution optimale changerait



Donc, on sait que la solution optimale change, mais on ne sait pas comment. Pour déterminer la nouvelle solution optimale, on revient à la méthode graphique en modifiant le terme de droite de la contrainte no. 1. La nouvelle solution optimale est $x_1 = 5$ $x_2 = 2,25$ de valeur 367,5 \$.

Objective Function:

Max $Z = 6x_1 + 3x_2$

Constraint

Add

Delete

1

$0x_1 + 0x_2 \leq 0$

Note:

The number of constraints can't be more than 5

Subject to:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

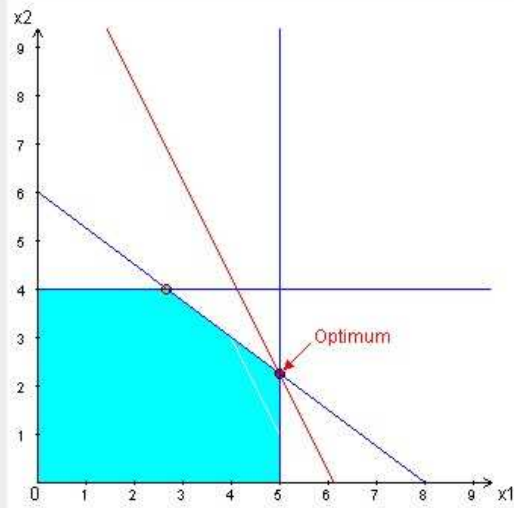
(1) $x_2 \leq 4$

(2) $6x_1 + 8x_2 \leq 48$

(3) $x_1 \leq 5$

Solve

Reset



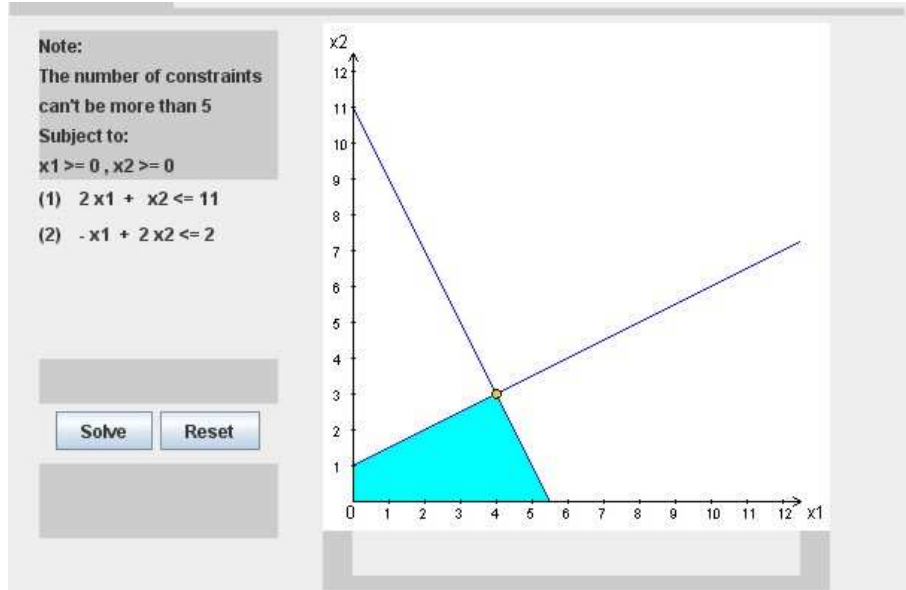
$Z = 36,75$ with $x_1 = 5, x_2 = 2,25$

After the optimal solution is reached, you can do sensitivity analysis by pressing the button below.

Sensitivity Analysis

2. (25 points)

a. Voici le domaine réalisable :



b. Notons d'abord qu'il y a quatre points extrêmes : $(0,0)$, $(0,1)$, $(4,3)$ et $(5.5, 0)$.

Cas 1 : $c_2 = 0$

Si $c_1 > 0$, la valeur de l'objectif augmente lorsque x_1 augmente. Or, la plus grande valeur que peut prendre x_1 est atteinte au point $(5.5,0)$, qui est donc une solution optimale dans ce cas.

Si $c_1 < 0$, la valeur de l'objectif augmente lorsque x_1 diminue. Or, la plus petite valeur que peut prendre x_1 est atteinte en tout point sur le segment reliant $(0,0)$ et $(0,1)$; il y a donc une infinité de solutions optimales dans ce cas, correspondant à ce segment.

Si $c_1 = 0$, toute solution réalisable est optimale (la valeur de l'objectif est 0 en tout point réalisable).

Cas 2 : $c_2 > 0$

Dans ce cas, l'analyse se subdivise en fonction de la pente de l'objectif, $-\frac{c_1}{c_2}$. On compare alors cette

pente à celles des frontières de chaque contrainte. Pour la première contrainte, la pente est -2 , alors que pour la deuxième, la pente est $1/2$.

Si $-\frac{c_1}{c_2} < -2$, alors la solution optimale est $(5.5,0)$.

Si $-\frac{c_1}{c_2} > \frac{1}{2}$, alors la solution optimale est $(0,1)$.

Si $-2 < -\frac{c_1}{c_2} < \frac{1}{2}$, alors la solution optimale est $(4,3)$.

Si $-\frac{c_1}{c_2} = -2$, alors tout point sur le segment reliant $(5.5,0)$ et $(4,3)$ est une solution optimale.

Si $-\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$, alors tout point sur le segment reliant $(0,1)$ et $(4,3)$ est une solution optimale.

Cas 3 : $c_2 < 0$

Dans ce cas aussi, l'analyse se subdivise en fonction de la pente de l'objectif, $-\frac{c_1}{c_2}$. Cependant, la valeur de l'objectif augmente lorsqu'on se déplace vers le bas sur le graphique.

Si $-\frac{c_1}{c_2} > 0$ (c'est-à-dire $c_1 > 0$), alors la solution optimale est $(5.5, 0)$.

Si $-\frac{c_1}{c_2} < 0$ (c'est-à-dire $c_1 < 0$), alors la solution optimale est $(0, 0)$.

Si $-\frac{c_1}{c_2} = 0$ (c'est-à-dire $c_1 = 0$), alors tout point sur le segment reliant $(0, 0)$ et $(5.5, 0)$ est une solution optimale.

3. (25 points)

a. Variables :

x_{ij} = quantité d'espace loué pour une durée de j mois à compter du mois i (m^2)

Objectif : minimiser le coût total de location (en dollars)

$$\min 65(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) + 100(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + 135(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 160(x_{14} + x_{24}) + 190(x_{15})$$

Contraintes :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 30000$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 20000$$

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 40000$$

$$x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} \geq 10000$$

$$x_{15} + x_{24} + x_{33} + x_{42} + x_{51} \geq 50000$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3,4,5, j = 1, \dots, 6-i$$

b. Voici le modèle représenté sous *Excel*

Devoir1_3b

| nb mois | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|-------|------------------|---------------|--------------|
| Coût/durée/mois | 65 \$ | 100 \$ | 135 \$ | 160 \$ | 190 \$ | | | | | | | | | | | | | |
| Location au mois | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | | | |
| Pour nb mois | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | Espace loué/mois | Espace requis | |
| Mois | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30000 | >= | 30000 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30000 | >= | 20000 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 40000 | >= | 40000 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 30000 | >= | 10000 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 50000 | >= | 50000 |
| Espace loué | 0 | 0 | 0 | 0 | 30000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 20000 | Min | | 7 650 000 \$ |
| Coût/durée | 65 \$ | 100 \$ | 135 \$ | 160 \$ | 190 \$ | 65 \$ | 100 \$ | 135 \$ | 160 \$ | 65 \$ | 100 \$ | 135 \$ | 65 \$ | 100 \$ | 65 \$ | | | |

| Nom | Cellules |
|--------------------|----------|
| Coût_durée | C15:Q15 |
| Coût_durée_mois | C3:G3 |
| Coût_total | T14 |
| Espace_loué | C14:Q14 |
| Espace_loué_mois | R8:R12 |
| Espace_requis_mois | T8:T12 |
| Matrice_mois_durée | C8:Q12 |

Voici le rapport de réponses, suite à la résolution par *Excel Solver* :

Cellule cible (Min)

| Cellule | Nom | Valeur initiale | Valeur finale |
|---------|------------|-----------------|---------------|
| \$T\$14 | Coût_total | \$0 | \$7 650 000 |

Cellules variables

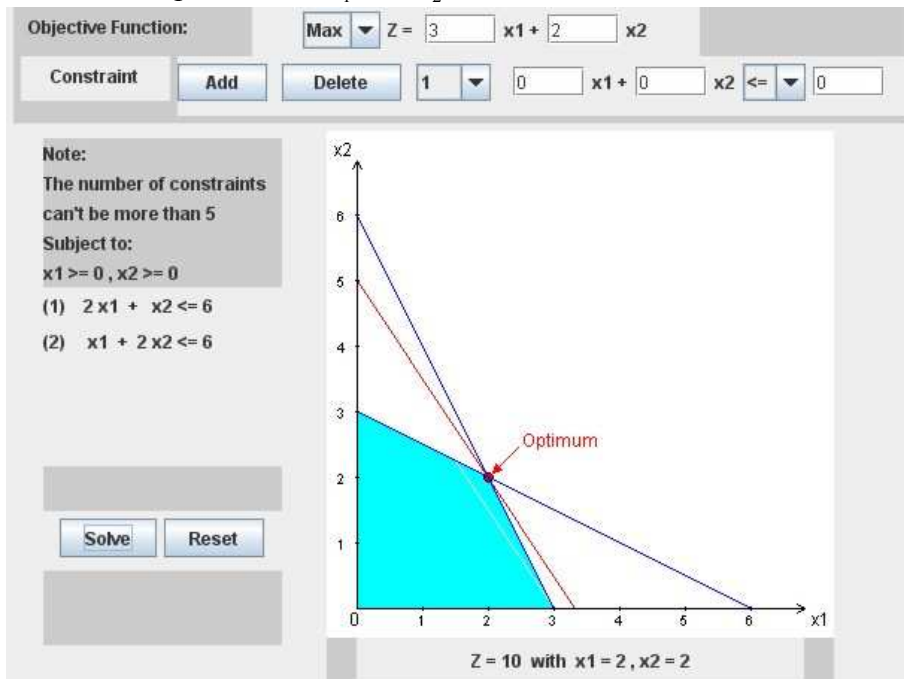
| Cellule | Nom | Valeur initiale | Valeur finale |
|---------|-------------|-----------------|---------------|
| \$C\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$D\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$E\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$F\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$G\$14 | Espace loué | 0 | 30000 |
| \$H\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$I\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$J\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$K\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$L\$14 | Espace loué | 0 | 10000 |
| \$M\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$N\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$O\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$P\$14 | Espace loué | 0 | 0 |
| \$Q\$14 | Espace loué | 0 | 20000 |

Contraintes

| Cellule | Nom | Valeur | Formule | État | Marge |
|---------|-----------|--------|------------------|---------|-------|
| \$R\$8 | loué/mois | 30000 | \$R\$8>=\$T\$8 | Lié | 0 |
| \$R\$9 | loué/mois | 30000 | \$R\$9>=\$T\$9 | Non lié | 10000 |
| \$R\$10 | loué/mois | 40000 | \$R\$10>=\$T\$10 | Lié | 0 |
| \$R\$11 | loué/mois | 30000 | \$R\$11>=\$T\$11 | Non lié | 20000 |
| \$R\$12 | loué/mois | 50000 | \$R\$12>=\$T\$12 | Lié | 0 |

4. (25 points)

a. La solution optimale est $x_1 = 2$ $x_2 = 2$ de valeur 10.



b.

| Coin | Réalisable? | Objectif | Coins adjacents |
|-------|----------------|----------|----------------------------|
| (0,0) | Réalisable | $Z=0$ | (0,3), (0,6), (3,0), (6,0) |
| (3,0) | Réalisable | $Z=9$ | (0,0), (6,0), (2,2), (0,6) |
| (6,0) | Non réalisable | $Z=18$ | (3,0), (0,0), (2,2), (0,3) |
| (2,2) | Réalisable | $Z=10$ | (3,0), (6,0), (0,3), (0,6) |
| (0,3) | Réalisable | $Z=6$ | (0,0), (0,6), (2,2), (6,0) |
| (0,6) | Non réalisable | $Z=12$ | (0,3), (0,0), (2,2), (3,0) |

c. Voir tableau en b.

d. Voir tableau en b : la solution optimale est $x_1 = 2$ $x_2 = 2$ de valeur 10.

e. On ajoute les variables d'écart x_3 et x_4 pour obtenir le système d'équations suivant :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$$

Voici pour chaque coin, la solution de base correspondante :

| Coin | Variables de base | Variables hors-base | Solution de base |
|-------|-------------------|---------------------|------------------|
| (0,0) | x_3, x_4 | x_1, x_2 | (0,0,6,6) |
| (3,0) | x_1, x_4 | x_2, x_3 | (3,0,0,3) |
| (6,0) | x_1, x_3 | x_2, x_4 | (6,0,-6,0) |
| (2,2) | x_1, x_2 | x_3, x_4 | (2,2,0,0) |
| (0,3) | x_2, x_3 | x_1, x_4 | (0,3,3,0) |
| (0,6) | x_2, x_4 | x_1, x_3 | (0,6,0,-6) |

f. Voir tableau en e.