

**Rapport écrit à remettre mercredi le 10 octobre – travail individuel**

**1. (25 points)**

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & = & 10 \\ -x_1 & & + & x_2 & & & & + & x_5 & = & 10 \end{array}$$

- Résolvez ce système par la méthode d'élimination de Gauss-Jordan en exprimant  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$  comme étant les variables indépendantes.
- Quelle est la solution de base correspondante ? Identifiez les variables de base et les variables hors-base.
- En supposant que  $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , cette solution de base est-elle réalisable? dégénérée?
- En supposant que  $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , et qu'on veuille maximiser l'objectif suivant :

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3$$

la solution de base obtenue en b. est-elle optimale? Justifiez.

- En supposant que  $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , et qu'on veuille maximiser l'objectif suivant :

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3$$

peut-on identifier plusieurs solutions optimales? Justifiez.

**2. (25 points)**

- Trouvez graphiquement (sans utiliser la méthode du simplexe) une solution optimale au modèle de programmation linéaire suivant :

$$\begin{array}{rccccrcr} \text{Min} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & & & & & \geq & 0 \end{array}$$

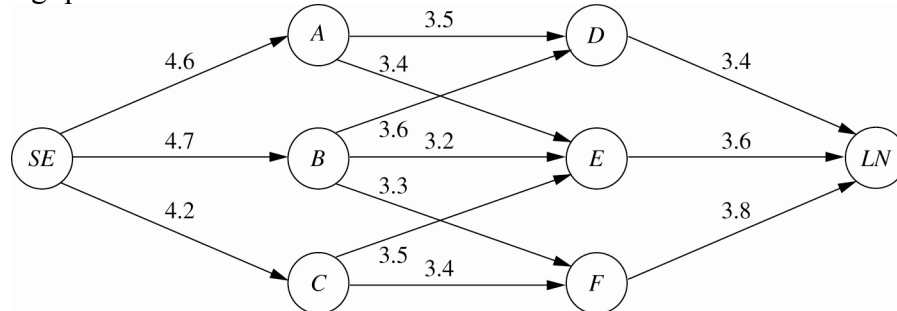
Vous pouvez utiliser *IOR Tutorial* (remettez dans ce cas la sortie d'écran montrant la solution graphique).

- Résolvez ce problème avec *IOR Tutorial*. Identifiez les multiplicateurs optimaux et donnez-en une interprétation graphique : quel est le lien entre les multiplicateurs optimaux et la solution graphique trouvée en a)?

Remettez dans votre rapport la sortie d'écran de *IOR Tutorial* montrant la solution optimale.

### 3. (25 points)

Un vol direct de Seattle (*SE*) à Londres (*LN*) peut emprunter différentes routes, en fonction des conditions météorologiques. Le graphe orienté suivant indique, sur chaque arc, le temps de parcours (en heures), en fonction des conditions météorologiques actuelles :



On cherche à minimiser le temps de parcours total entre Seattle et Londres, étant donné les conditions météorologiques actuelles.

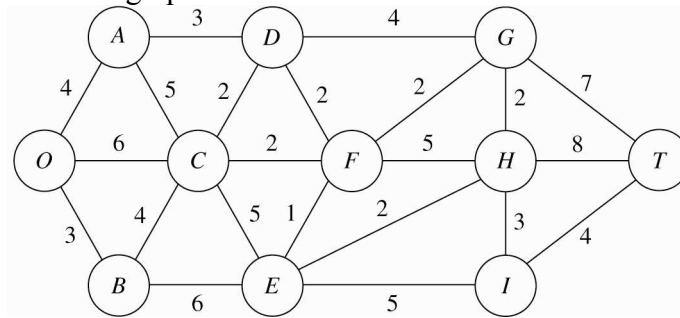
- Modélisez ce problème comme celui de trouver un chemin le plus court dans un graphe orienté. Que représentent les distances aux arcs?
- Résolvez ce problème par l'algorithme de Dijkstra. Spécifiez le déroulement de chacune des itérations de l'algorithme.
- Représentez ce modèle à l'aide d'un chiffrier *Excel*. Résolvez-le à l'aide d'*Excel Solver*. Remettez dans votre rapport les sorties d'écran suivantes : le modèle sur chiffrier *Excel* et le rapport de réponses.

### 4. (25 points)

Considérez un graphe non orienté auquel on associe une distance non négative à chaque arête. Dans un tel graphe, on définit la *distance* d'un sous-ensemble quelconque d'arêtes comme étant la somme des distances des arêtes appartenant à ce sous-ensemble.

- Considérez le problème de trouver les plus courtes chaînes entre un certain sommet *O* et tous les autres sommets (c'est-à-dire que, pour chaque sommet *j*, on cherche une chaîne de plus petite distance reliant *O* à *j*). Montrez que le graphe composé uniquement des arêtes appartenant aux plus courtes chaînes est nécessairement un arbre partiel.
- Montrez par un exemple (*le plus petit possible*) que l'arbre partiel correspondant aux plus courtes chaînes n'est pas nécessairement un arbre partiel minimum (c'est-à-dire un arbre partiel de distance minimum parmi tous les arbres partiels du graphe).

Considérez maintenant le graphe suivant :



- c. Supposons qu'on veuille relier le sommet  $O$  à chacun des autres sommets par une chaîne de telle sorte qu'on minimise la distance du sous-ensemble composé de toutes les chaînes reliant  $O$  à chacun des autres sommets. Quel problème cherche-t-on alors à résoudre? Utilisez un algorithme vu au cours pour résoudre ce problème. Spécifiez le déroulement de chacune des itérations de l'algorithme.
- d. Supposons qu'on veuille relier le sommet  $O$  à chacun des autres sommets par une chaîne de telle sorte que, pour chaque sommet  $j$ , on minimise la distance du sous-ensemble composé de la chaîne reliant  $O$  à  $j$ . Quel problème cherche-t-on alors à résoudre? Utilisez un algorithme vu au cours pour résoudre ce problème. Spécifiez le déroulement de chacune des itérations de l'algorithme.