

## 1. (25 points)

a. Voici la résolution par la méthode d'élimination de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & & = 10 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & & = 10 \\ & 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & +x_5 & = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & & = 10 \\ & x_2 & +2x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_5 & = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +2x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_5 & = 10 \end{array}$$

b.  $x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$

Variables de base :  $x_1, x_2$

Variables hors-base :  $x_3, x_4, x_5$

c. Réalisable, car  $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$

Dégénérée, car  $x_1 = 0$  (variable de base ayant une valeur nulle)

d.  $Z = x_1 + 3x_2 + 8x_3 = (-2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5) + 3(-2x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + 10) + 8x_3$   
 $= 0x_3 + (-2)x_4 + (-1)x_5 + 30$

Tous les coûts réduits sont non positifs : la solution de base (réalisable) est donc optimale.

e. Il pourrait exister d'autres solutions si on pouvait effectuer un pivot en utilisant  $x_3$  comme variable d'entrée (car son coût réduit est égal à 0) et trouver une autre solution de base réalisable. Ici, le seul pivot permettant de demeurer réalisable doit utiliser  $x_1$  comme variable de sortie, et on obtient alors le système suivant :

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2}x_1 & & +x_3 & +\frac{1}{4}x_4 & -\frac{1}{4}x_5 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 10 \end{array}$$

Avec comme objectif :

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 3x_2 + 8x_3 = x_1 + 3(x_1 - x_5 + 10) + 8(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5) \\ &= 0x_1 + (-2)x_4 + (-1)x_5 + 30 \end{aligned}$$

La solution de base obtenue avec ce pivot est donc :

$$x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$$

soit la même solution que nous avons identifiée auparavant! On ne peut donc pas identifier plusieurs solutions optimales dans ce cas (en général, lorsqu'une variable hors-base a un coût réduit nul, ça serait possible, à condition que la solution ne soit pas dégénérée).

## 2. (25 points)

- a. Il suffit de passer au dual de ce modèle, qui a deux variables, et peut donc être résolu par la méthode graphique :

$$\max 4y_1 + 3y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$y_1 - 2y_2 \leq 3$$

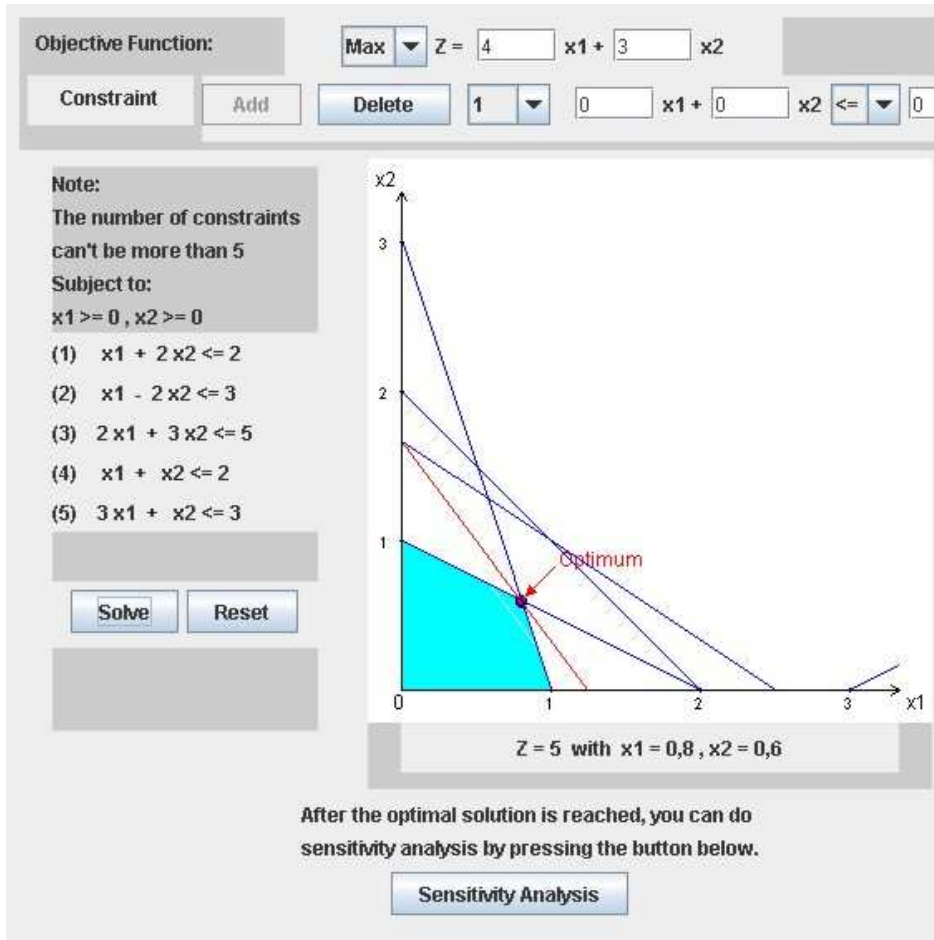
$$2y_1 + 3y_2 \leq 5$$

$$y_1 + y_2 \leq 2$$

$$3y_1 + y_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

La solution optimale fournie par la méthode graphique est alors :  $y_1 = 0.8, y_2 = 0.6$ , de valeur  $Z = 5$



Pour obtenir une solution optimale du modèle primal, il suffit de remarquer que :

La valeur de l'objectif est 5.

La première contrainte fonctionnelle est satisfaite à égalité (puisque sa variable duale associée est  $> 0$ ; les écarts complémentaires imposent que la contrainte soit satisfaite à égalité).

La deuxième contrainte fonctionnelle est satisfaite à égalité (puisque sa variable duale associée est  $> 0$ ).

En combinant ces trois observations, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 5 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \\
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3
\end{aligned}$$

Toute solution (avec des valeurs non négatives) de ce système est donc une solution optimale :

$$x_1 = x_5 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

b. Voici le résultat de la résolution du problème par *IOR Tutorial* :

Optimal Solution		Objective Function Coefficients		
Objective Function: Z = -5		Allowable Range to Stay Optimal		
Variable	Value	Current Value	Minimum	Maximum
X1	1	2	1	3,14
X2	0	3	-0,4	infin
X3	0	5	3,4	infin
X4	0	2	1,4	infin
X5	1	3	1	6

Constraint	Slack or Surplus	Shadow Price
1	0	-0,8
2	0	-0,6

Allowable Range for Right-Hand Side		
Current Value	Minimum	Maximum
4	1,5	9
3	1,33	8

Les multiplicateurs optimaux (shadow price) sont -0.8 et -0.6 (car si on écrivait l'objectif sous forme de maximisation, on obtiendrait dans la solution de base optimale  $-Z = -5 - 0.8x_6 - 0.6x_7$ , où  $x_6$  et  $x_7$  sont les variables de surplus associées aux contraintes fonctionnelles du primal). L'opposé des multiplicateurs optimaux (0.8 et 0.6) correspond à la solution graphique identifiée en a.

### 3. (25 points)

- a. Ce problème revient à celui de trouver le plus court chemin entre l'origine (*SE*) et la destination (*LN*) dans le graphe orienté représenté dans l'énoncé. Ici, les distances aux arcs correspondent aux temps de parcours entre deux sommets.
- b. Voici les étapes de l'algorithme de Dijkstra, sous forme de tableau :

<i>i</i> marqués relié à <i>j</i> non marqué	<i>j</i> non marqué le plus près	Dist	Dist min	<i>j</i> le plus près	<i>p(j)</i>
<i>SE</i>	C	4,2	4,2	C	<i>SE</i>
<i>SE</i> C	A F	4,6 7,6	4,6	A	<i>SE</i>
<i>SE</i> A C	B E F	4,7 8,0 7,6	4,7	B	<i>SE</i>
A B C	E E F	8,0 7,9 7,6	7,6	F	C
A B C F	E E E <i>LN</i>	8,0 7,9 7,7 11,4	7,7	E	C
A B E F	D D <i>LN</i> <i>LN</i>	8,1 8,3 11,5 11,4	8,1	D	A
D E F	<i>LN</i> <i>LN</i> <i>LN</i>	11,5 11,3 11,4	11,3	<i>LN</i>	E

Le chemin le plus court est donc :  $SE \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow LN$ . C'est celui qui minimise le temps de parcours total entre Seattle et Londres, qui est de 11,3h pour ce chemin.

c. Voir le fichier *Devoir2\_3c.xls*

### Devoir2\_3c

De	À	Chemin	Distance	Sommet	Flot net	Offre/demande	Noms d'intervalles	Cellules
SE	A	0	4,6	SE	1	= 1	Distance	F4:F16
SE	B	0	4,7	A	0	= 0	De	B4:B16
SE	C	1	4,2	B	0	= 0	FlotNet	I4:I11
A	D	0	3,5	C	0	= 0	Sommet	H4:H11
A	E	0	3,4	D	0	= 0	Chemin	D4:D16
B	D	0	3,6	E	0	= 0	OffreDemande	K4:K11
B	E	0	3,2	F	0	= 0	A	C4:C16
B	F	0	3,3	LN	-1	= -1	DistanceTotale	D18
C	E	1	3,5					
C	F	0	3,4					
D	LN	0	3,4					
E	LN	1	3,6					
F	LN	0	3,8					
Total Distance		11,3						

Cellule cible (Min)

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$D\$18	DistanceTotale	0	11,3

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$D\$4	A Chemin	0	0
\$D\$5	B Chemin	0	0
\$D\$6	C Chemin	0	1
\$D\$7	D Chemin	0	0
\$D\$8	E Chemin	0	0
\$D\$9	D Chemin	0	0
\$D\$10	E Chemin	0	0
\$D\$11	F Chemin	0	0
\$D\$12	E Chemin	0	1
\$D\$13	F Chemin	0	0
\$D\$14	LN Chemin	0	0
\$D\$15	LN Chemin	0	1
\$D\$16	LN Chemin	0	0

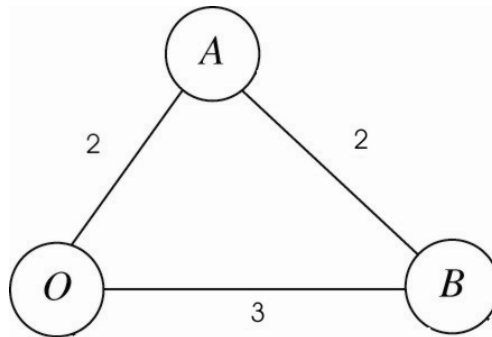
Contraintes

Cellule	Nom	Valeur	Formule	État	Marge
\$I\$4	SE Flot net	1	\$I\$4=\$K\$4	Non lié	0
\$I\$5	A Flot net	0	\$I\$5=\$K\$5	Non lié	0
\$I\$6	B Flot net	0	\$I\$6=\$K\$6	Non lié	0
\$I\$7	C Flot net	0	\$I\$7=\$K\$7	Non lié	0
\$I\$8	D Flot net	0	\$I\$8=\$K\$8	Non lié	0
\$I\$9	E Flot net	0	\$I\$9=\$K\$9	Non lié	0
\$I\$10	F Flot net	0	\$I\$10=\$K\$10	Non lié	0
\$I\$11	LN Flot net	-1	\$I\$11=\$K\$11	Non lié	0

4. (25 points)

a. Puisque le problème consiste à trouver, pour chaque sommet  $j$ , une chaîne (de plus petite distance) reliant  $O$  à  $j$ , on en déduit que, pour chaque sommet  $j$ , on doit identifier une seule chaîne, la plus courte (ou une des plus courtes, s'il y en a plusieurs), reliant  $O$  à  $j$ . Le graphe formé de ces plus courtes chaînes est nécessairement connexe, puisque pour toute paire de sommets  $i$  et  $j$ , il existe une chaîne les reliant, qui est formée de la chaîne reliant  $i$  à  $O$  et de celle reliant  $O$  à  $j$ . De plus, ce graphe ne comporte aucun cycle. Sinon, supposons qu'il y a au moins un cycle; alors, n'importe quel sommet appartenant à ce cycle serait relié à  $O$  par deux chaînes, une contradiction. Puisque le graphe composé des plus courtes chaînes est connexe et sans cycle, il forme un arbre partiel.

b. Considérons le graphe suivant :



L'arbre partiel correspondant aux plus courtes chaînes est constitué des arêtes  $\{O,A\}$  et  $\{O,B\}$ , puisque la plus courte chaîne reliant  $O$  à  $A$  est l'arête  $\{O,A\}$  elle-même, alors que la plus courte chaîne reliant  $O$  à  $B$  est l'arête  $\{O,B\}$  elle-même. Par contre, l'arbre partiel minimum est constituée des arêtes  $\{O,A\}$  et  $\{A,B\}$ .

- c. On cherche alors à résoudre le problème de l'arbre partiel minimum, pour lequel nous pouvons utiliser l'algorithme de Prim. Voici les étapes de cet algorithme sur notre exemple, sous forme de tableau :

<i>i</i> marqués relié à <i>j</i> non marqué	<i>j</i> non marqué le plus près	Dist	Dist min	<i>j</i> le plus près	Arête ajoutée
O	B	3	3	B	{O,B}
O	A	4	4	A	{O,A}
B	C	4			
O	C	6			
A	D	3	3	D	{A,D}
B	C	4			
O	C	6			
A	C	5			
B	C	4			
D	C	2	2	C	{D,C}
B	E	6			
C	F	2	2	F	{C,F}
D	F	2			
B	E	6			
C	E	5			
D	G	4			
F	E	1	1	E	{F,E}
D	G	4			
E	H	2	2	H	{E,H}
F	G	2			
D	G	4			
E	I	5			
F	G	2	2	G	{F,G}
H	G	2			
E	I	5			
G	T	7			
H	I	3	3	I	{H,I}
G	T	7			
H	T	8			
I	T	4	4	T	{I,T}

L'arbre partiel minimum (mais il y en a d'autres) comprend donc les arêtes suivantes :

{O,B}, {O,A}, {A,D}, {D,C}, {C,F}, {F,E}, {E,H}, {F,G}, {H,I}, {I,T}.

Sa distance est :  $3+4+3+2+2+1+2+2+3+4 = 26$ .

- d. On cherche alors à résoudre le problème des plus courtes chaînes entre  $O$  et chaque sommet  $j$ , pour lequel nous pouvons utiliser l'algorithme de Dijkstra. Voici les étapes de cet algorithme sur notre exemple, sous forme de tableau :

$i$ marqués relié à $j$ non marqué	$j$ non marqué le plus près	Dist	Dist min	$j$ le plus près	Arête ajoutée
O	B	3	3	B	{O,B}
O B	A C	4 7	4	A	{O,A}
O A B	C D C	6 7 7	6	C	{O,C}
A B C	D E D	7 9 8	7	D	{A,D}
B C D	E F F	9 8 9	8	F	{C,F}
B C D F	E E G E	9 11 11 9	9	E	{F,E}
D E F	G H G	11 11 10	10	G	{F,G}
E F G	H H H	11 13 12	11	H	{E,H}
E G H	I T I	14 17 14	14	I	{E,I}
G H I	T T T	17 19 18	17	T	{G,T}

Pour chaque sommet, les plus courtes chaînes sont :

- A : {O,A} (distance = 4)  
 B : {O,B} (distance = 3)  
 C : {O,C} (distance = 6)  
 D : {O,A}, {A,D} (distance = 7)  
 E : {O,C}, {C,F}, {F,E} (distance = 9)  
 F : {O,C}, {C,F} (distance = 8)  
 G : {O,C}, {C,F}, {F,G} (distance = 10)  
 H : {O,C}, {C,F}, {F,E}, {E,H} (distance = 11)  
 I : {O,C}, {C,F}, {F,E}, {E,I} (distance = 14)  
 T : {O,C}, {C,F}, {F,G}, {G,T} (distance = 17)