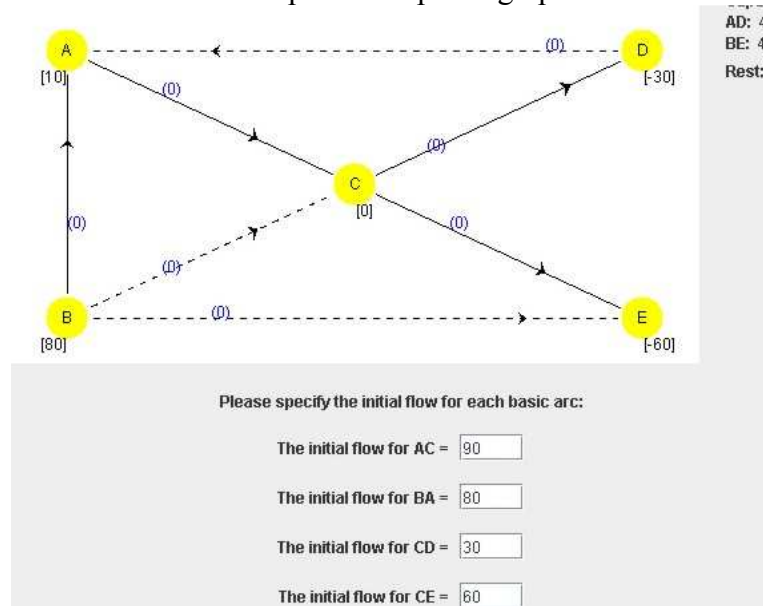
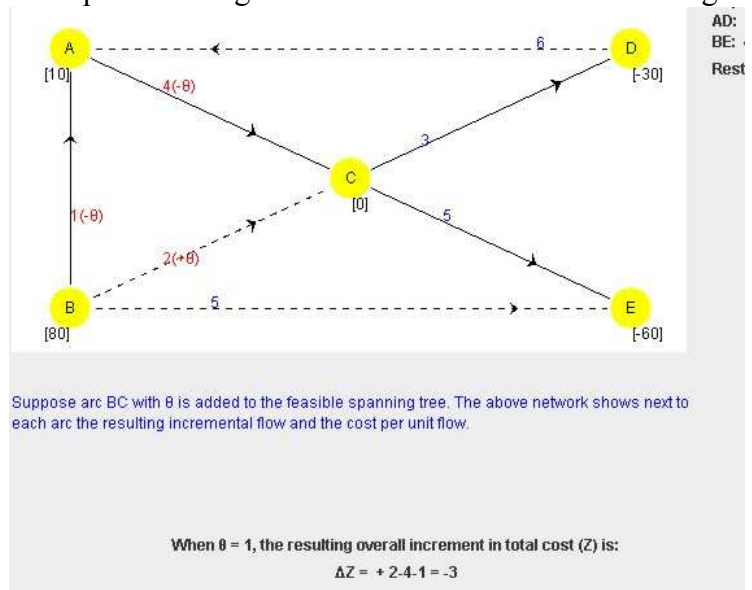


- c. Puisque (A,D) est traversé en sens inverse, on a $x_{AD} = 40$. Puisque $x_{AD} + x_{CD} = 70$, on a $x_{CD} = 30$. Puisque (B,E) est hors-base, on a $x_{BE} = 0$. Puisque $x_{BE} + x_{CE} = 60$, on a $x_{CE} = 60$. Puisque (B,C) est hors-base, on a $x_{BC} = 0$, d'où $x_{AC} = x_{CD} + x_{CE} - x_{BC} = 30 + 60 - 0 = 90$. Enfin, on a $x_{BA} = -50 + x_{AD} + x_{AC} = -50 + 40 + 90 = 80$.
- d. La solution de base initiale est représentée par le graphe suivant :

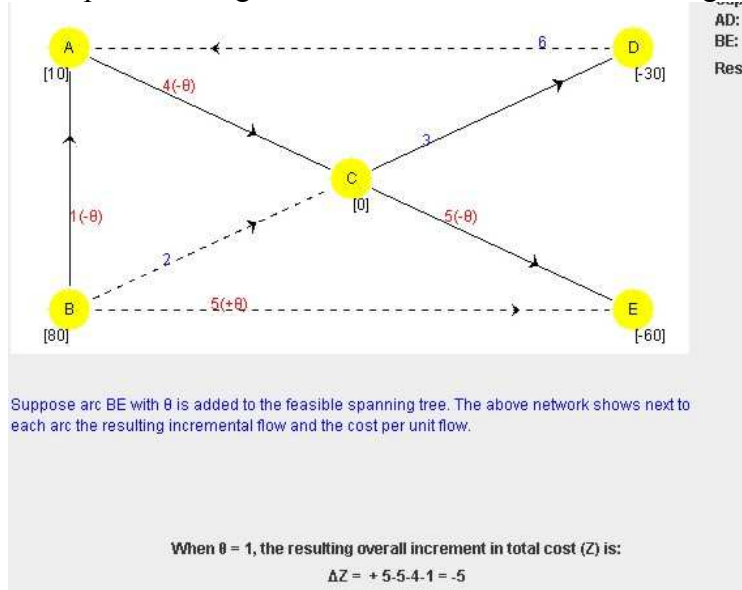


Itération 1

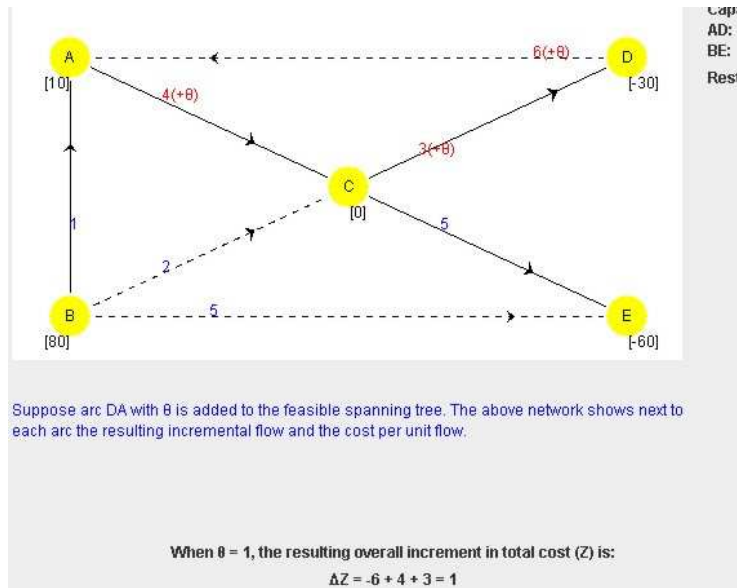
Si (B,C) entrerait dans la base, on obtiendrait le cycle BCAB, et l'objectif diminuerait de 3 pour une augmentation d'une unité de flot le long de ce cycle :



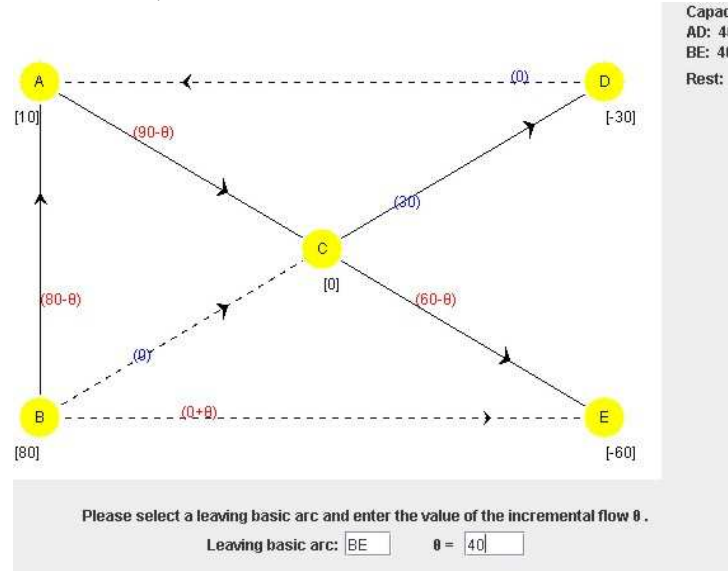
Si (B,E) entrait dans la base, on obtiendrait le cycle BECAB, et l'objectif diminuerait de 5 pour une augmentation d'une unité de flot le long de ce cycle :



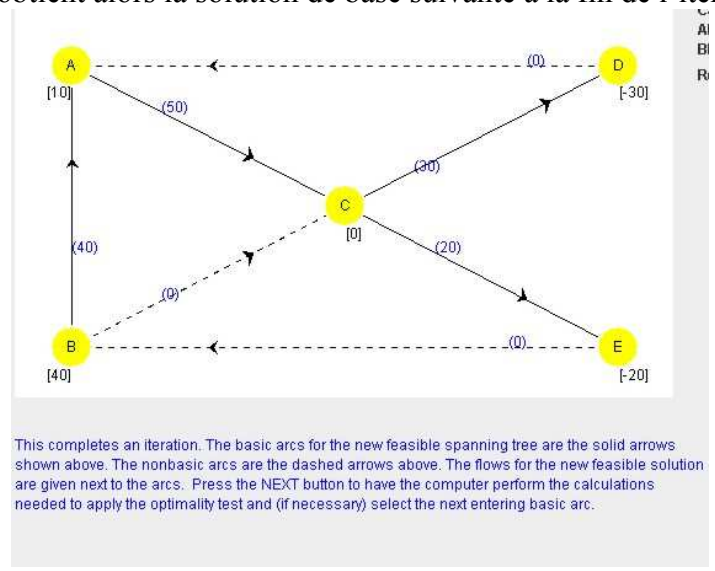
Si (D,A) entrait dans la base, on obtiendrait le cycle DACD, et l'objectif augmenterait de 1 pour une augmentation d'une unité de flot le long de ce cycle :



L'arc qui entre dans la base est donc (B,E). Déterminons maintenant l'arc qui sortira de la base, en utilisant le schéma suivant :

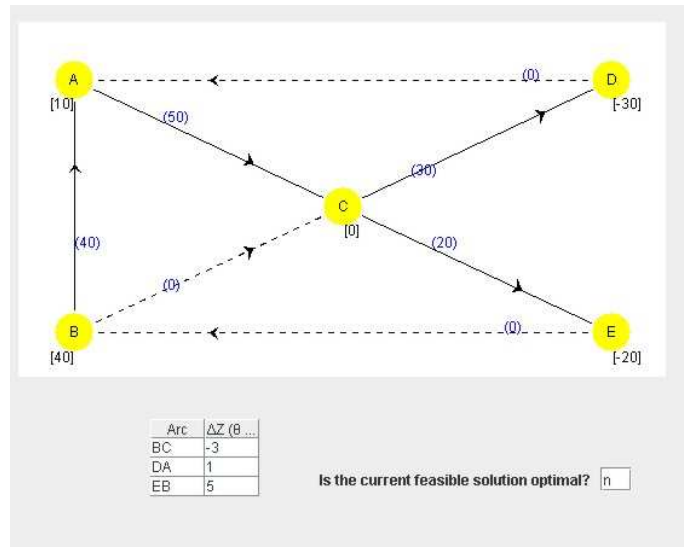


Le flot sur (B,E) peut augmenter de 40, la capacité de l'arc.
 Le flot sur (C,E) peut diminuer de 60, le flot sur l'arc.
 Le flot sur (A,C) peut diminuer de 90, le flot sur l'arc.
 Le flot sur (B,A) peut diminuer de 80, le flot sur l'arc.
 Le flot augmentera donc de 40 unités le long du cycle, et l'arc (B,E) sort de la base, devenant un arc hors-base à capacité. Il faut donc renverser cet arc et on obtient alors la solution de base suivante à la fin de l'itération 1 :

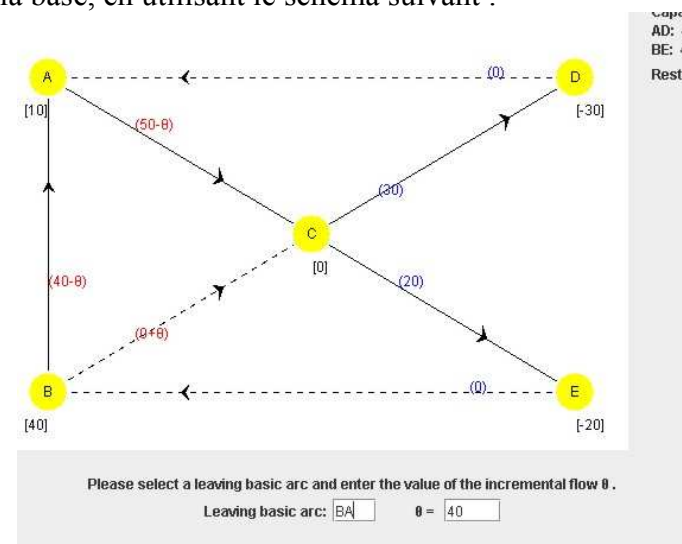


Iteration 2

Afin de déterminer si la solution est optimale, et dans la négative l'arc qui entrera dans la base, les variations de l'objectif sont calculées pour chaque arc hors-base :

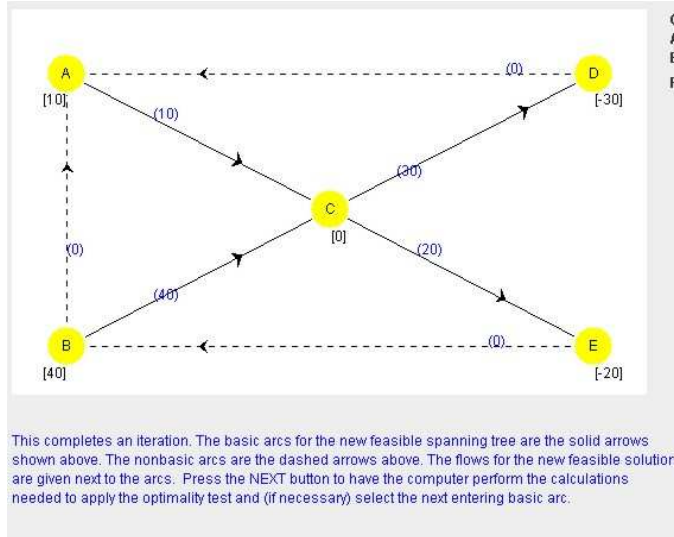


L'arc qui entre dans la base est (B,C). Déterminons maintenant l'arc qui sortira de la base, en utilisant le schéma suivant :



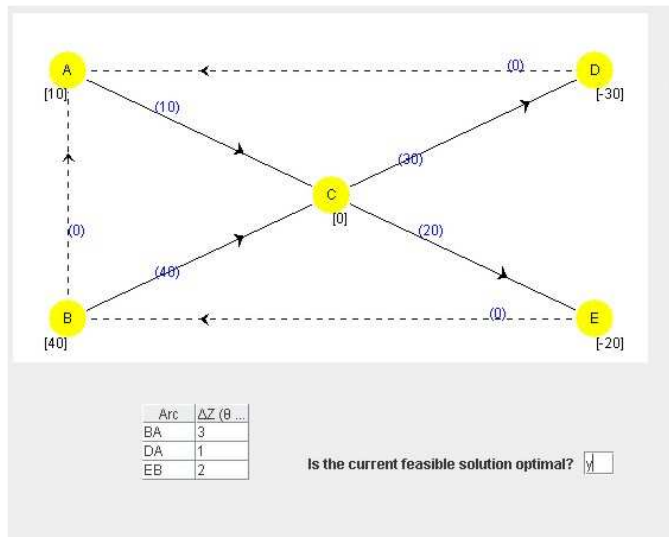
Le flot sur (B,C) peut augmenter indéfiniment.
 Le flot sur (A,C) peut diminuer de 50, le flot sur l'arc.
 Le flot sur (B,A) peut diminuer de 40, le flot sur l'arc.

Le flot augmentera donc de 40 unités le long du cycle et l'arc (B,A) sort de la base, devenant un arc hors-base à flot nul. On obtient alors la solution de base suivante à la fin de l'itération 2 :

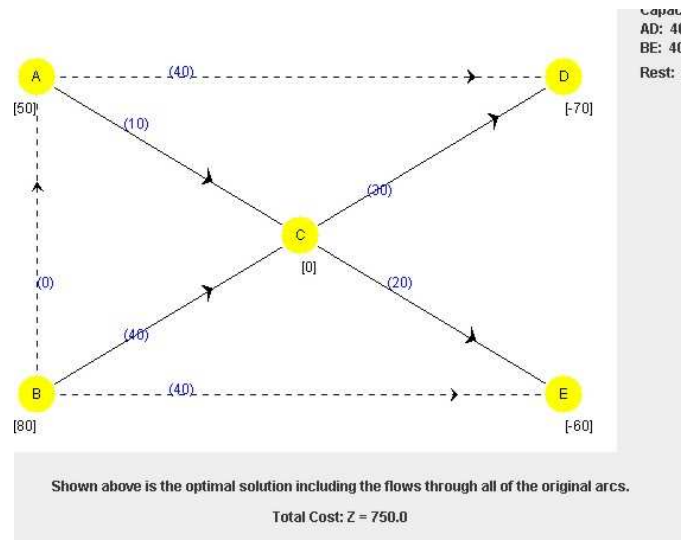


Itération 3

Afin de déterminer si la solution est optimale, et dans la négative l'arc qui entrera dans la base, les variations de l'objectif sont calculées pour chaque arc hors-base :



Puisque les variations de l'objectif sont toutes positives, la solution de base courante est optimale. Il faut maintenant retrouver la solution du problème original en renversant les arcs hors-base à capacité, ici (D,A) et (E,B) :



2. (25 points)

a. Variables

x_i = nombre d'unités du produit P_i à fabriquer d'ici une semaine, $i = 1, 2$

Objectif

$$\max Z = 130x_1 + 150x_2$$

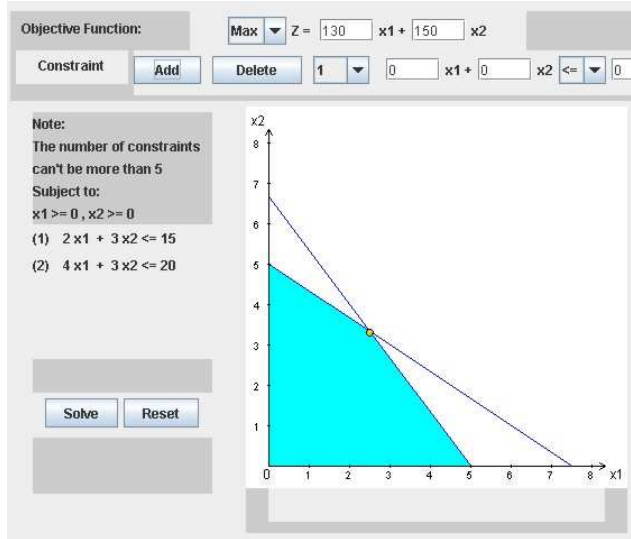
Contraintes

$$3,2x_1 + 2,4x_2 \leq 16$$

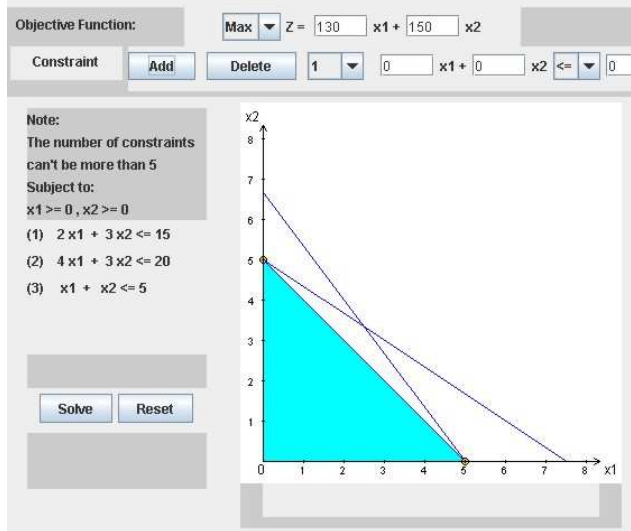
$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers}$$

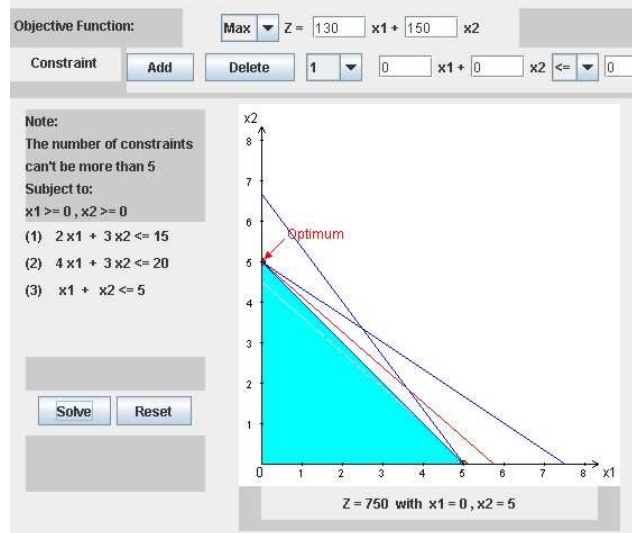
b. Le domaine réalisable correspond à l'ensemble des points entiers inclus dans le polytope défini par les contraintes du modèle :



Il est facile de vérifier graphiquement qu'en ajoutant la contrainte $x_1 + x_2 \leq 5$, on élimine aucun point entier à l'intérieur de ce polytope :

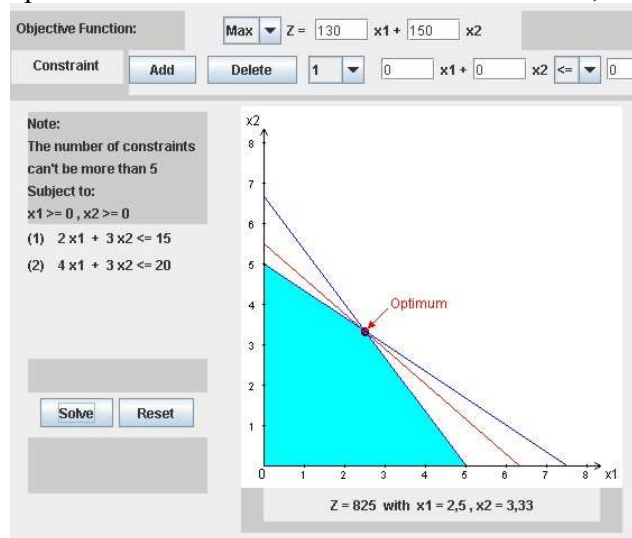


Si on résout ce nouveau modèle, pour lequel tous les points extrêmes du domaine réalisable sont entiers, on obtiendra nécessairement la solution optimale du modèle de programmation en nombres entiers :



La solution optimale est donc $x_1 = 0, x_2 = 5$ et la valeur optimale est $Z = 750$.

c. Lorsqu'on résout la relaxation PL du modèle en a, on obtient :



La solution optimale de la relaxation PL est donc $x_1 = 2,5, x_2 = 3 \frac{1}{3}$ et la valeur optimale est $Z = 825$.

En utilisant la technique d'arrondissement, on identifie quatre solutions entières les plus près de cette solution :

Solution	Réalisable?	Valeur
(2,3)	oui	710
(2,4)	non	-
(3,3)	non	-
(3,4)	non	-

La seule solution entière réalisable obtenue par la technique d'arrondissement est (2,3) qui n'est pas optimale, puisque sa valeur est $710 < 750$, qui est la valeur au point réalisable (0,5).

d. Voir le fichier *Devoir3_2d.xls*

Devoir3_2d

	Produit P1	Produit P2		
Profit/unité	130 \$	150 \$		
	Temps de production/unité (h)		Heures utilisées	Heures disponibles
Usine U1	3,2	2,4	12	<= 16
Usine U2	2	3	15	<= 15
	Produit P1	Produit P2		Profit total
Unités fabriquées	0	5		Max 750 \$

Noms d'intervalles	Cellules
Unités_fabriquées	C12:D12
Heures_disponibles	G7:G8
Heures_utilisées	E7:E8
Temps_production	C7:D8
Profit_unité	C4:D4
Profit_total	G12

Cellule cible (Max)

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$G\$11	Profit_total	0 \$	750 \$

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$C\$11	Unités fabriquées Produit P1	0	0
\$D\$11	Unités fabriquées Produit P2	0	5

Contraintes

Cellule	Nom	Valeur	Formule	État	Marge
\$E\$7	Usine U1 utilisées	12	\$E\$7<=\$G\$7	Non lié	4
\$E\$8	Usine U2 utilisées	15	\$E\$8<=\$G\$8	Lié	0
\$C\$11	Unités fabriquées Produit P1	0	\$C\$11=entier	Lié	0
\$D\$11	Unités fabriquées Produit P2	5	\$D\$11=entier	Lié	0

e. Voici les étapes de l'algorithme de branch-and-bound.

Itération 0

La relaxation PL est résolue. On ne peut élaguer ce sommet, puisqu'on obtient une solution réalisable et non entière.

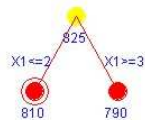


LP - Relaxation Optimal Solution: (2,5, 3,33), Z = 825.

- Incumbent
- Fathomed

Itération 1

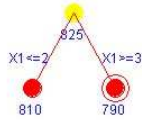
On branche sur x_1 , la première variable ayant une valeur non entière, et on génère deux sous-problèmes. Le premier correspond à l'ajout de la contrainte $x_1 \leq 2$ et on ne peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable non entière.



LP - Relaxation Optimal Solution: (2, 3,67), Z = 810.

- Incumbent
- Fathomed

Le deuxième correspond à l'ajout de la contrainte $x_1 \geq 3$ et on ne peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable non entière.



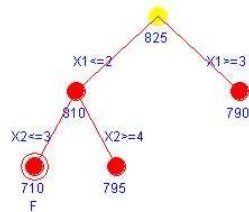
LP - Relaxation Optimal Solution: (3, 2,67), Z = 790.

Incumbent

Fathomed

Itération 2

On choisit le sous-problème non élagué ayant la plus grande borne supérieure et on branche sur x_2 , la seule variable à valeur non entière. On génère deux sous-problèmes. Le premier correspond à l'ajout de la contrainte $x_2 \leq 3$ et on peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable entière. De plus, on met alors à jour la meilleure borne supérieure : $Z^* = 710$.



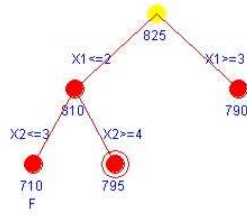
LP - Relaxation Optimal Solution: (2, 3), Z = 710.

Incumbent

Fathomed

Incumbent:
 $X = (2, 3)$
 $Z^* = 710$

Le deuxième sous-problème correspond à l'ajout de la contrainte $x_2 \geq 4$ et on ne peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable non entière de valeur supérieure à $Z^* = 710$.

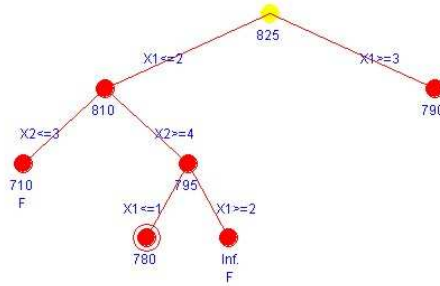


LP - Relaxation Optimal Solution: (1,5 , 4), Z = 795.

<input type="checkbox"/> Incumbent	Incumbent:
<input type="checkbox"/> Fathomed	X = (2, 3)
	Z* = 710

Itération 3

Parmi les sous-problèmes créés plus récemment, celui correspondant à $x_2 \geq 4$ est le seul non élagué. Il est sélectionné pour effectuer un branchement sur x_1 , la seule variable à valeur non entière. On génère ainsi deux sous-problèmes. Le premier correspond à l'ajout de la contrainte $x_1 \leq 1$ et on ne peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable non entière de valeur supérieure à $Z^* = 710$.



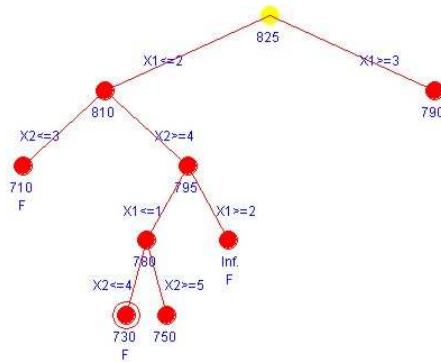
LP - Relaxation Optimal Solution: (1 , 4,33), Z = 780.

<input type="checkbox"/> Incumbent	Incumbent:
<input type="checkbox"/> Fathomed	X = (2, 3)
	Z* = 710

Le deuxième sous-problème correspond à l'ajout de la contrainte $x_1 \geq 2$ et on peut élaguer ce sommet, car il ne correspond à aucune solution réalisable (voir graphique précédent).

Itération 4

Parmi les sous-problèmes créés plus récemment, celui correspondant à $x_1 \leq 1$ est le seul non élagué. Il est sélectionné pour effectuer un branchement sur x_2 , la seule variable à valeur non entière. On génère ainsi deux sous-problèmes. Le premier correspond à l'ajout de la contrainte $x_2 \leq 4$ et on peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable entière. De plus, on met alors à jour la meilleure borne supérieure : $Z^* = 730 > 710$.

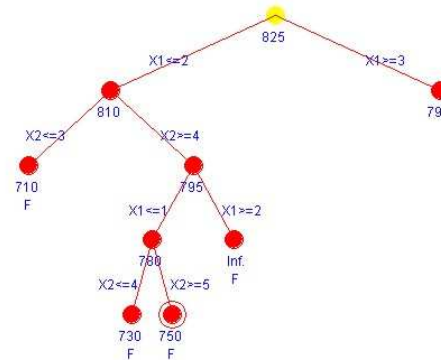


LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 4), Z = 730.

Incumbent
 Fathomed

Incumbent:
X = (1, 4)
Z* = 730

Le deuxième sous-problème correspond à l'ajout de la contrainte $x_2 \geq 5$ et on peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable entière. De plus, on met alors à jour la meilleure borne supérieure : $Z^* = 750 > 730$.



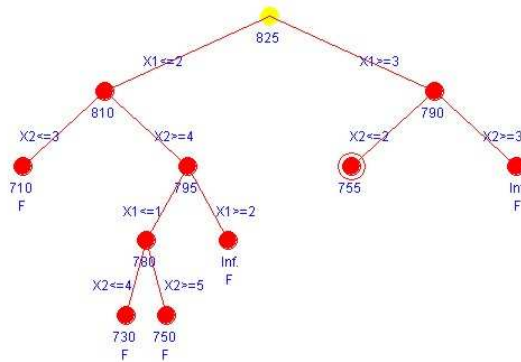
LP - Relaxation Optimal Solution: (0, 5), Z = 750.

Incumbent
 Fathomed

Incumbent:
X = (0, 5)
Z* = 750

Itération 5

Il ne reste qu'un seul sommet non encore élagué, celui correspondant (au premier niveau de l'arbre) à l'ajout de la contrainte $x_1 \geq 3$. On ne peut élaguer ce sommet, puisque sa borne supérieure (790) est plus grande que $Z^* = 750$. On le sélectionne donc pour effectuer un branchement sur x_2 , la seule variable non entière. On génère ainsi deux sous-problèmes. Le premier correspond à l'ajout de la contrainte $x_2 \leq 2$ et on ne peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable non entière de valeur supérieure à $Z^* = 750$.



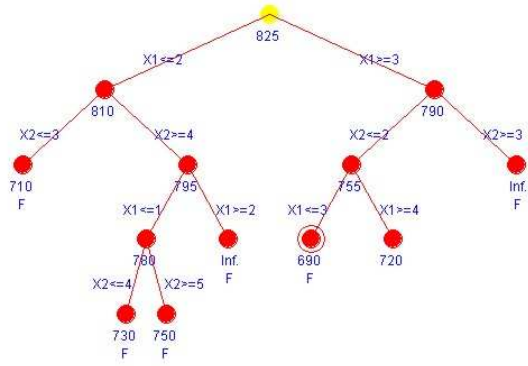
LP - Relaxation Optimal Solution: (3,5, 2), Z = 755.

<input type="checkbox"/> Incumbent	Incumbent:
<input type="checkbox"/> Fathomed	x = (0, 5)
	Z* = 750

Le deuxième sous-problème correspond à l'ajout de la contrainte $x_2 \geq 3$ et on peut élaguer ce sommet, car il ne correspond à aucune solution réalisable (voir graphique précédent).

Itération 6

Parmi les sous-problèmes créés plus récemment, celui correspondant à $x_2 \leq 2$ est le seul non élagué. Il est sélectionné pour effectuer un branchement sur x_1 , la seule variable à valeur non entière. On génère ainsi deux sous-problèmes. Le premier correspond à l'ajout de la contrainte $x_1 \leq 3$ et on peut élaguer ce sommet, car il correspond à une solution réalisable entière. Puisque sa valeur (690) est inférieure à $Z^* = 750$, on ne met pas à jour Z^* .



LP - Relaxation Optimal Solution: (3 , 2), Z = 690.

Incubent

Fathomed

Incubent:

X = (0, 5)

Z* = 750

$$\begin{array}{rcccccccc}
+ x_{AB} & + x_{AC} & + x_{AD} & & & & & & = 20 \\
- x_{AB} & & & + x_{BC} & + x_{BD} & & & & = 10 \\
& - x_{AC} & & - x_{BC} & & + x_{CE} & & & = 0 \\
& & - x_{AD} & & - x_{BD} & & + x_{DE} & & = 0 \\
& & & & & - x_{CE} & - x_{DE} & & = -30
\end{array}$$

$$x_{AB} \leq 20y_{AB}$$

$$x_{AC} \leq 10y_{AC}$$

$$x_{AD} \leq 20y_{AD}$$

$$x_{BC} \leq 25y_{BC}$$

$$x_{BD} \leq 30y_{BD}$$

$$x_{CE} \leq 30y_{CE}$$

$$x_{DE} \leq 30y_{DE}$$

$$x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CE}, x_{DE} \geq 0$$

$$y_{AB}, y_{AC}, y_{AD}, y_{BC}, y_{BD}, y_{CE}, y_{DE} \in \{0,1\}$$

c. Voir le fichier *Devoir3_3c.xls*

Devoir3_3c

De	À	Utilisé?	Flot		Capacité utilisée	Capacité	Coût unitaire	Sommets	Flot net	=	Offre/demande
A	B	0	0	<=	0	20	2	A	20	=	20
A	C	0	0	<=	0	10	6	B	10	=	10
A	D	1	20	<=	20	20	5	C	0	=	0
B	C	0	0	<=	0	25	3	D	0	=	0
B	D	1	10	<=	30	30	5	E	-30	=	-30
C	E	0	0	<=	0	30	3				
D	E	1	30	<=	30	30	4				

Min Coût total	570
Coût fixe	100

Noms d'intervalles		Cellules
De		B4:B10
À		C4:C10
Utilisé		D4:D10
Flot		E4:E10
Capacité utilisée		G4:G10
Capacité		H4:H10
Coût unitaire		I4:I10
Sommets		K4:K8
Flot_net		L4:L8
Offre/demande		N4:N8
Coût fixe		D13
Coût total		D12

Cellule cible (Min)

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$D\$12	Coût_total	0	570

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$D\$4	B Utilisé?	0	0
\$E\$4	B Flot	0	0
\$D\$5	C Utilisé?	0	0
\$E\$5	C Flot	0	0
\$D\$6	D Utilisé?	0	1
\$E\$6	D Flot	0	20
\$D\$7	C Utilisé?	0	0
\$E\$7	C Flot	0	0
\$D\$8	D Utilisé?	0	1
\$E\$8	D Flot	0	10
\$D\$9	E Utilisé?	0	0
\$E\$9	E Flot	0	0
\$D\$10	E Utilisé?	0	1
\$E\$10	E Flot	0	30

Contraintes

Cellule	Nom	Valeur	Formule	État	Marge
\$L\$4	A Flot net	20	\$L\$4=\$N\$4	Non lié	0
\$L\$5	B Flot net	10	\$L\$5=\$N\$5	Non lié	0
\$L\$6	C Flot net	0	\$L\$6=\$N\$6	Non lié	0
\$L\$7	D Flot net	0	\$L\$7=\$N\$7	Non lié	0
\$L\$8	E Flot net	-30	\$L\$8=\$N\$8	Non lié	0
\$E\$4	B Flot	0	\$E\$4<=\$G\$4	Lié	0
\$E\$5	C Flot	0	\$E\$5<=\$G\$5	Lié	0
\$E\$6	D Flot	20	\$E\$6<=\$G\$6	Lié	0
\$E\$7	C Flot	0	\$E\$7<=\$G\$7	Lié	0
\$E\$8	D Flot	10	\$E\$8<=\$G\$8	Non lié	20
\$E\$9	E Flot	0	\$E\$9<=\$G\$9	Lié	0
\$E\$10	E Flot	30	\$E\$10<=\$G\$10	Lié	0
\$D\$4	B Utilisé?	0	\$D\$4=binaire	Lié	0
\$D\$5	C Utilisé?	0	\$D\$5=binaire	Lié	0
\$D\$6	D Utilisé?	1	\$D\$6=binaire	Lié	0
\$D\$7	C Utilisé?	0	\$D\$7=binaire	Lié	0
\$D\$8	D Utilisé?	1	\$D\$8=binaire	Lié	0
\$D\$9	E Utilisé?	0	\$D\$9=binaire	Lié	0
\$D\$10	E Utilisé?	1	\$D\$10=binaire	Lié	0

d. La relaxation PL peut être formulée ainsi :

$$\min 2x_{AB} + 6x_{AC} + 5x_{AD} + 3x_{BC} + 5x_{BD} + 3x_{CE} + 4x_{DE} + 100(y_{AB} + y_{AC} + y_{AD} + y_{BC} + y_{BD} + y_{CE} + y_{DE})$$

$$\begin{array}{rcccccccc} +x_{AB} & +x_{AC} & +x_{AD} & & & & & & = 20 \\ -x_{AB} & & & +x_{BC} & +x_{BD} & & & & = 10 \\ & -x_{AC} & & -x_{BC} & & +x_{CE} & & & = 0 \\ & & -x_{AD} & & -x_{BD} & & +x_{DE} & & = 0 \\ & & & & & -x_{CE} & -x_{DE} & & = -30 \end{array}$$

$$x_{AB} \leq 20y_{AB}$$

$$x_{AC} \leq 10y_{AC}$$

$$x_{AD} \leq 20y_{AD}$$

$$x_{BC} \leq 25y_{BC}$$

$$x_{BD} \leq 30y_{BD}$$

$$x_{CE} \leq 30y_{CE}$$

$$x_{DE} \leq 30y_{DE}$$

$$x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CE}, x_{DE} \geq 0$$

$$0 \leq y_{AB}, y_{AC}, y_{AD}, y_{BC}, y_{BD}, y_{CE}, y_{DE} \leq 1$$

Étant donné que chaque variable y_{ij} n'apparaît que dans une seule contrainte fonctionnelle, de la forme $x_{ij} \leq u_{ij}y_{ij}$, cette contrainte doit être satisfaite avec égalité dans toute solution optimale. Sinon, si on avait une solution optimale dans laquelle au moins une contrainte de cette forme est telle que $x_{ij} < u_{ij}y_{ij}$,

on pourrait simplement poser $y_{ij} = \frac{x_{ij}}{u_{ij}}$ et obtenir une autre solution réalisable de moindre coût, contredisant ainsi l'hypothèse que notre solution est optimale.

On peut donc poser $y_{ij} = \frac{x_{ij}}{u_{ij}}$ et on obtient alors le modèle suivant, une fois que

les variables y_{ij} ont été remplacées par cette équation :

$$\min 7x_{AB} + 16x_{AC} + 10x_{AD} + 7x_{BC} + 8\frac{1}{3}x_{BD} + 6\frac{1}{3}x_{CE} + 7\frac{1}{3}x_{DE}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} +x_{AB} & +x_{AC} & +x_{AD} & & & & & & = 20 \\ -x_{AB} & & & +x_{BC} & +x_{BD} & & & & = 10 \\ & -x_{AC} & & -x_{BC} & & +x_{CE} & & & = 0 \\ & & -x_{AD} & & -x_{BD} & & +x_{DE} & & = 0 \\ & & & & & -x_{CE} & -x_{DE} & & = -30 \end{array}$$

$$x_{AC} \leq 10$$

$$x_{BC} \leq 25$$

$$x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CE}, x_{DE} \geq 0$$

Il s'agit bien sûr d'un problème de flot à coût minimum.

4. (25 points)

a. Le domaine de la fonction de densité est l'intervalle $(-1,1)$. On a donc :

$$1 = \int_{-1}^1 K(1-x^2)dx = K(x - x^3/3) \Big|_{-1}^1 = K(4/3) \Rightarrow K = 3/4$$

b. Si $b < -1$: $F_X(b) = 0$

Si $-1 \leq b \leq 1$:

$$F_X(b) = \int_{-1}^b (3/4)(1-x^2)dx = (3/4)(x - x^3/3) \Big|_{-1}^b = (3/4)(b+1) - (1/4)(b^3+1)$$

Si $b > 1$: $F_X(b) = 1$

c. $E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2 \int_{-1}^1 (3/4)x(1-x^2)dx - 1 = 2(3/4)(x^2/2 - x^3/3) \Big|_{-1}^1 - 1 = 0 - 1 = -1$

d. $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \int_{-1}^1 (3/4)x^2(1-x^2)dx = (3/4)(x^3/3 - x^5/5) \Big|_{-1}^1 = 1/5$