

Rapport écrit à remettre mercredi le 5 décembre – travail individuel

1. (25 points)

Supposons qu'un fabricant possède une machine qui, lorsqu'elle fonctionne au début d'un jour donné, peut devenir défectueuse avec une probabilité de 0,1. Lorsque cela se produit, la réparation est effectuée le jour suivant et complétée avant la fin de ce jour.

- Représentez l'évolution des états de la machine à la fin d'une journée à l'aide d'un processus stochastique. Déterminez l'ensemble des états possibles.
- Le processus stochastique en a. représente-t-il une chaîne de Markov? Si c'est le cas, déterminez sa matrice de transition.

Supposons maintenant que le fabricant possède une machine de réserve, qui est utilisée uniquement lorsque la machine principale est en réparation. Lorsque cela se produit, la machine de réserve peut elle-même devenir défectueuse avec une probabilité de 0,1.

- Représentez l'évolution des états des deux machines à la fin d'une journée à l'aide d'un processus stochastique. Déterminez l'ensemble des états possibles.
- Le processus stochastique en c. représente-t-il une chaîne de Markov? Si c'est le cas, déterminez sa matrice de transition.

2. (25 points)

Considérez un modèle de file d'attente $M/M/1$ pour lequel le taux moyen d'arrivée est $\lambda = 5$ clients/heure et le taux moyen de service est $\mu = 10$ clients/heure. On cherche à estimer les mesures de performance suivantes :

- L , le nombre moyen de clients dans le système;
- W , le temps moyen passé dans le système;
- L_q , le nombre moyen de clients en attente dans la file;
- W_q , le temps moyen passé en attente dans la file.

A cette fin, utilisez les quatre approches suivantes :

- Utilisez les résultats analytiques présentés au cours et à la période de travaux pratiques (vous pouvez également consulter Hillier et Lieberman, section 17.6) pour calculer les valeurs exactes de ces mesures de performance.
- Étant donné qu'il n'y a pas de client au départ, effectuez une simulation à la main par intervalles de temps fixes (utilisez un intervalle de 6 minutes) jusqu'à ce que deux clients aient été servis. Utilisez la suite de nombres aléatoires suivante : 0,096; 0,569; 0,665; 0,764; 0,842; 0,492; 0,224; 0,950; 0,610; 0,145; 0,484; 0,552; 0,350.

- c. Utilisez la procédure interactive de *IOR Tutorial* (qui effectue une simulation par génération d'événement) jusqu'à ce que 20 clients aient été servis. Présentez dans votre rapport un tableau présentant les itérations effectuées par la procédure, de même que la sortie d'écran présentant les résultats finaux (les estimations des mesures de performance).
- d. Utilisez la macro *Queueing Simulator* dans *Excel* pour effectuer une simulation correspondant à l'arrivée de 10000 clients.

3. (25 points)

Considérez un système électronique ayant quatre composants, dont chacun doit fonctionner pour que le système fonctionne. La fiabilité du système peut être améliorée en installant des unités parallèles dans un ou plusieurs composants. Le tableau suivant donne les probabilités que chacun des quatre composants fonctionne s'il contient une, deux ou trois unités parallèles :

Nombre d'unités parallèles	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4
1	0,5	0,6	0,7	0,5
2	0,6	0,7	0,8	0,7
3	0,8	0,8	0,9	0,9

La probabilité que le système fonctionne est le produit des probabilités que les composants fonctionnent.

Les coûts (en centaines de dollars) pour installer une, deux ou trois unités parallèles pour chaque composant sont donnés dans le tableau suivant :

Nombre d'unités parallèles	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4
1	1	2	1	2
2	2	4	3	3
3	3	5	4	4

Utilisez la programmation dynamique pour déterminer combien d'unités parallèles doivent être installées dans chaque composant afin de maximiser la probabilité que le système fonctionne, tout en ne dépassant pas la limite budgétaire de 1000 \$.

4. (25 points)

Considérez le modèle de programmation non linéaire suivant :

$$\max f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 - x_1^2 + 2x_2 + x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

- Montrez qu'il s'agit d'un modèle de programmation convexe.
- Dérivez les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour ce modèle.
- Résolvez le système obtenu à partir des conditions KKT. Pouvez-vous en déduire une solution optimale pour ce modèle? Si oui, donnez cette solution et justifiez; si non, dites pourquoi.