

**Directives :**

- La calculatrice est interdite.
- Aucune documentation n'est permise.
- L'examen est d'une durée de 2 heures et 45 minutes.
- Vous devez d'abord remplir la feuille de présence au bas du cahier de réponses et la détacher.
- N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur la page couverture du cahier de réponses.
- Tout étudiant pris en flagrant délit de plagiat (échange d'informations entre étudiants, consultation de documentation) recevra la note 0; des sanctions plus sévères, pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'Université, pourraient s'ensuivre.

**1. (25 points)**

Considérez le modèle de programmation non linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{aligned}\max Z &= 4x_1^2 - x_1^3 + 10x_2^2 - x_2^4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ et entiers}\end{aligned}$$

- a. Modélisez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire en nombres entiers contenant uniquement six variables binaires, définies ainsi :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

- b. Afin de résoudre ce problème par la programmation dynamique, spécifiez les étapes, les états pour chaque étape, les variables de décision et la relation de récurrence.
- c. Résolvez ce problème par la programmation dynamique et identifiez toutes les solutions optimales.

**2. (15 points)**

Considérez le modèle de programmation binaire suivant :

$$\begin{aligned}\min & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 0 \\ & -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

- a. Exécutez l'algorithme de branch-and-bound en branchant selon l'ordre croissant des indices des variables (brancher d'abord sur  $x_1$ , puis sur  $x_2$ , et enfin sur  $x_3$ ) et en

choisissant lors de chaque branchement le sous-problème le plus récemment créé de plus petite borne inférieure. Représentez l'arbre obtenu, en utilisant les informations suivantes, relatives aux **relaxations PL** des sous-problèmes pouvant être générés durant l'exécution de l'algorithme :

Variables branchées	Solution optimale	Valeur optimale
Aucune	$x_1=0,5, x_2=0, x_3=0,5$	6
$x_1=0$	Non réalisable	-
$x_1=1$	$x_1=1, x_2=0, x_3=0,67$	9,67
$x_1=0, x_2=0$	Non réalisable	-
$x_1=0, x_2=1$	Non réalisable	-
$x_1=1, x_2=0$	$x_1=1, x_2=0, x_3=0,67$	9,67
$x_1=1, x_2=1$	$x_1=1, x_2=1, x_3=1$	18

b. Déterminez la solution optimale et la valeur optimale du modèle.

### 3. (20 points)

Considérez un système de file d'attente ayant un seul serveur. Les temps d'arrivée et de service pour chacun des cinq premiers clients sont donnés par le tableau suivant :

Client	Temps d'arrivée	Temps de service
1	5	8
2	8	6
3	17	2
4	18	4
5	22	7

a. Complétez ce tableau en donnant pour chaque client le temps de départ, le temps passé dans le système et le temps d'attente.

En vous servant de ces observations, estimez les quantités suivantes :

- b.  $P_0$ , la probabilité qu'il n'y ait aucun client dans le système.
- c.  $P_1$ , la probabilité qu'il y ait un client dans le système.
- d.  $P_2$ , la probabilité qu'il y ait deux clients dans le système.
- e.  $P_3$ , la probabilité qu'il y ait trois clients dans le système.
- f.  $L$ , le nombre moyen de clients dans le système.
- g.  $W$ , le temps moyen passé dans le système par un client.
- h.  $L_q$ , le nombre moyen de clients dans la file d'attente (excluant ceux qui sont servis).
- i.  $W_q$ , le temps moyen passé dans la file d'attente par un client (excluant le temps de service).

**Note** : Pour les questions b. à i., vous n'avez pas de calculs à effectuer. Spécifiez uniquement la formule utilisée en fonction des données du tableau.

**4. (20 points)**

Considérez le modèle de programmation non linéaire suivant :

$$\max f(x_1, x_2) = 20x_1 + 10x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- Montrez qu'il s'agit d'un modèle de programmation convexe.
- Dérivez les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour ce modèle.
- Résolvez le système obtenu à partir des conditions KKT.
- Pouvez-vous en déduire une solution optimale pour ce modèle? Si oui, donnez cette solution et justifiez; si non, dites pourquoi.

**5. (20 points)**

Considérez le problème de voyageur de commerce pour lequel les distances entre les villes sont données par le tableau suivant :

Ville	2	3	4	5
1	8	4	8	11
2		5	6	3
3			4	7
4				6

- Énumérez toutes les solutions et spécifiez la distance totale parcourue pour chacune d'elles.
- A partir de la solution 1-2-3-4-5-1, énumérez toutes les solutions obtenues par inversion de sous-tours.
- Effectuez une itération de la méthode de descente (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-2-3-4-5-1. Si vous deviez effectuer une seconde itération, que se passerait-il?
- Supposez que nous procédions à une itération de la méthode de recuit simulé (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-2-3-4-5-1. Pour chaque solution candidate identifiée en b, évaluez sa probabilité d'acceptation si cette solution était générée au hasard (prenez  $T = 2$  comme valeur du paramètre de température).

**Note :** Pour la question d., vous n'avez pas de calculs à effectuer. Donnez uniquement l'expression de la probabilité d'acceptation.