

1. (25 points)

a. On définit les variables suivantes :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad i = 1,2; j = 1,2,3$$

Le modèle linéaire en nombres entiers s'écrit alors ainsi :

$$\max Z = 3y_{11} + 8y_{12} + 9y_{13} + 9y_{21} + 24y_{22} + 9y_{23}$$

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} \leq 1$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} \leq 1$$

$$y_{11} + y_{23} \leq 1$$

$$y_{12} + y_{23} \leq 1$$

$$y_{12} + y_{22} \leq 1$$

$$y_{13} + y_{23} \leq 1$$

$$y_{13} + y_{22} \leq 1$$

$$y_{13} + y_{21} \leq 1$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,2; j = 1,2,3$$

b. Étape $n =$ variable $x_n, n = 1,2$

État $s_n =$ écart dans la contrainte $x_1 + x_2 \leq 3$

Variable de décision = x_n

Relation de récurrence

$$f_2^*(s_2) = \max\{10x_2^2 - x_2^4 \mid 0 \leq x_2 \leq s_2, x_2 \text{ entier}\}$$

$$f_1^*(s_1) = \max\{4x_1^2 - x_1^3 + f_2^*(s_2) \mid 0 \leq x_1 \leq s_1, x_1 \text{ entier}\}$$

$$s_1 = 3, s_2 = 3 - x_1 = s_1 - x_1, \text{ d'où } s_2 \in \{0,1,2,3\}$$

c. On calcule d'abord x_2^* et $f_2^*(s_2)$

s_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	-	-	-	0	0
1	0	9	-	-	9	1
2	0	9	24	-	24	2
3	0	9	24	9	24	2

Calculons maintenant x_1^* et $f_1^*(s_1)$

s_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
3	24	27	17	9	27	1

La valeur optimale est donc 27. La solution optimale (il n'y en a qu'une) est

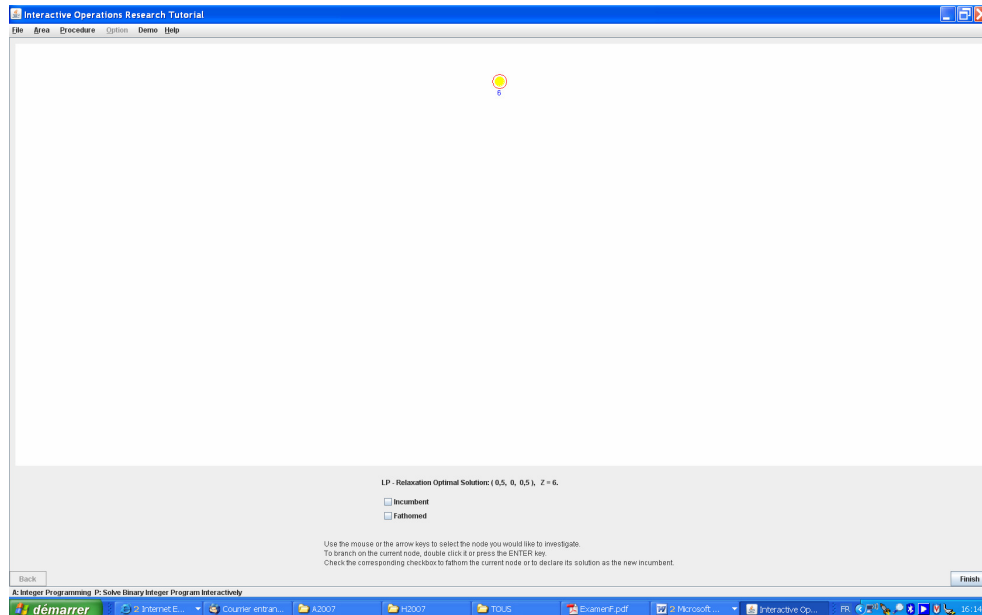
$$x_1^* = 1 \text{ (d'où } s_2 = 2), x_2^* = 2.$$

2. (15 points)

a. Voici l'exécution de l'algorithme à chaque itération.

Itération 0

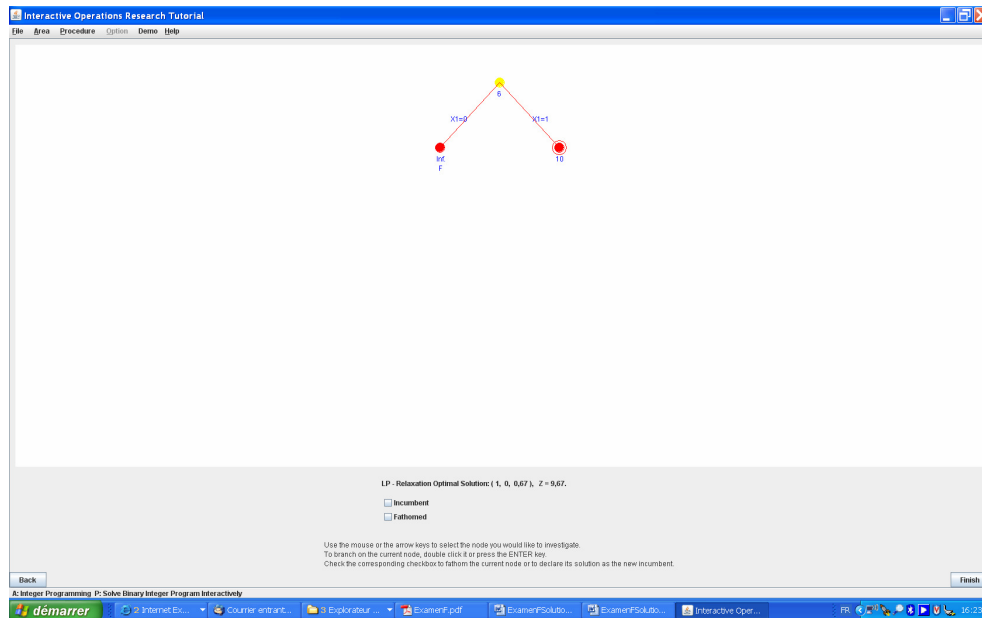
La racine de l'arbre n'est pas élaguée, car sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière.



Itération 1

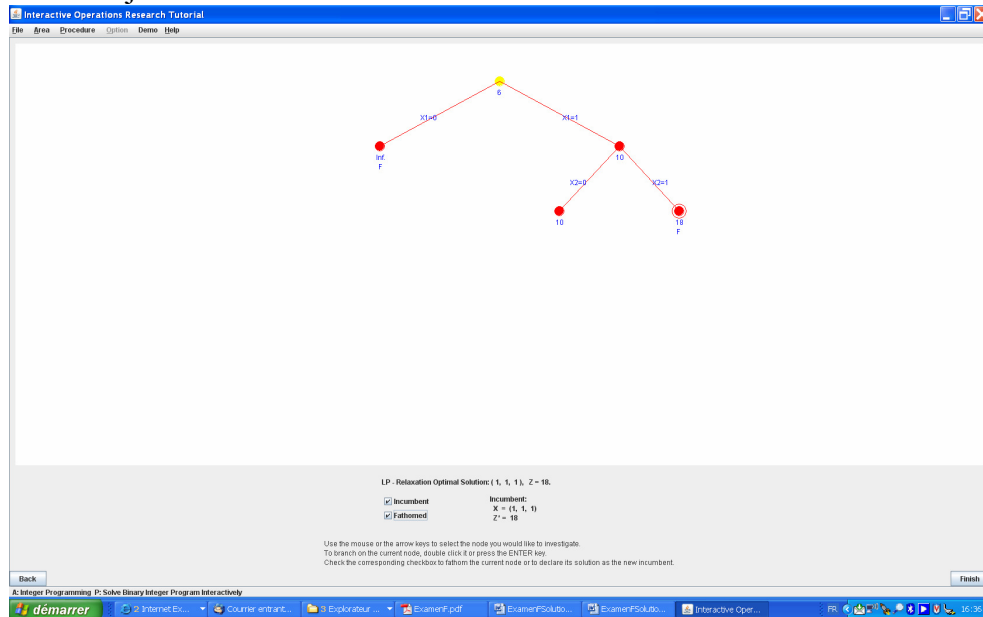
On branche à la racine. Le sommet correspondant à $x_1 = 0$ est élagué, car sa relaxation PL n'a pas de solution réalisable.

Le sommet correspondant à $x_1 = 1$ ne peut être élagué, puisque sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière et sa borne inférieure est $10 < +\infty = Z^*$.

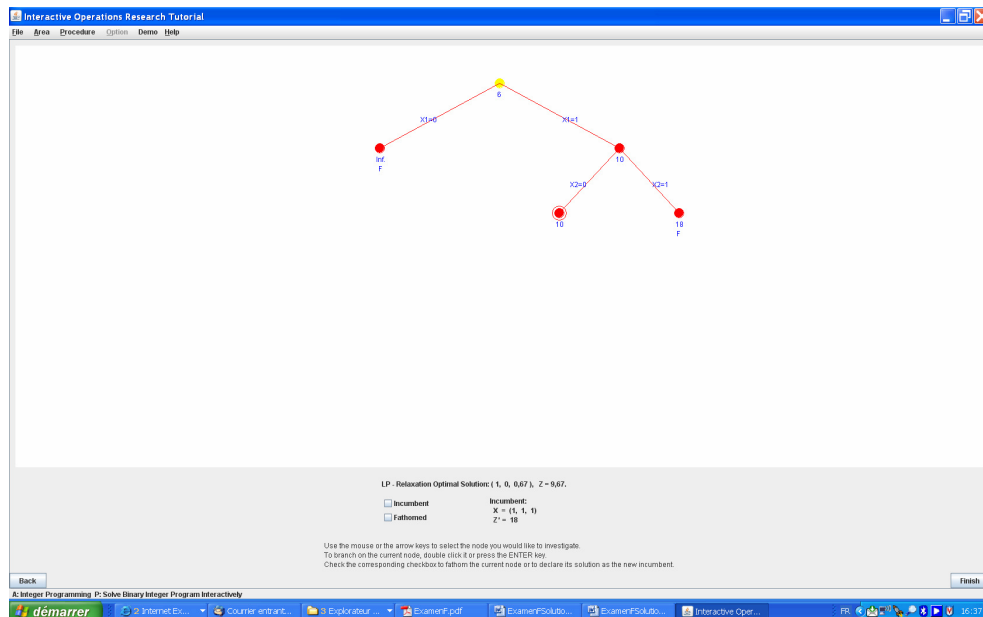


Itération 2

On branche au sommet correspondant à $x_1 = 1$, puisque c'est le seul sommet non élagué. Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 1$, est élagué car la solution de sa relaxation PL est entière; cette solution devient donc la meilleure solution connue et on met à jour $Z^* = 18$.



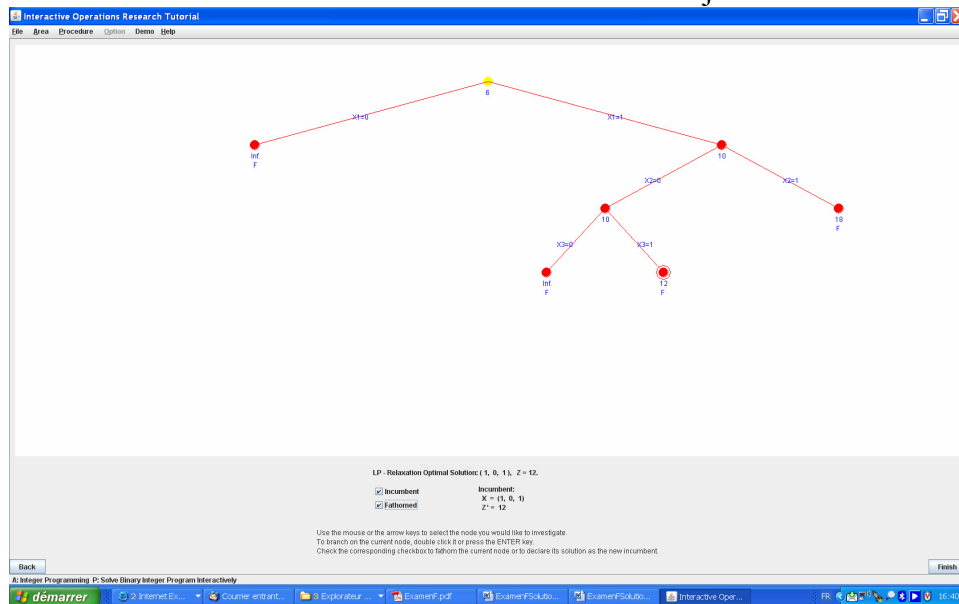
Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 0$ n'est pas élagué puisque sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière et sa borne inférieure est $10 < 18 = Z^*$.



Itération 3

On branche au sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 0$, puisque c'est le seul sommet non élagué. Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$, est élagué, puisqu'il ne conduit à aucune solution réalisable, la troisième contrainte étant violée par cette solution.

Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$, est élagué, puisqu'il correspond à une solution réalisable entière. Puisque la valeur de cette solution est $12 < 18 = Z^*$, elle devient la meilleure solution courante et on met à jour $Z^* = 12$.



Itération 4

Puisqu'il n'y a plus de sommet non élagué, l'algorithme s'arrête.

- b. Solution optimale : $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$
Valeur optimale : $Z^* = 12$

3. (20 points)

a. Voici le tableau complet :

Client	Temps d'arrivée	Temps de service	Temps de départ	Temps dans le système	Temps d'attente
1	5	8	13	8	0
2	8	6	19	11	5
3	17	2	21	4	2
4	18	4	25	7	3
5	22	7	32	10	3

b. $P_0 = 5/32$

c. $P_1 = (3+4+1+7)/32 = 15/32$

d. $P_2 = (5+1+2+3)/32 = 11/32$

e. $P_3 = 1/32$

f. $L = \sum_{n=1}^3 nP_n = 1(15/32) + 2(11/32) + 3(1/32) = 40/32 = 5/4 = 1,25$

g. $W = (8 + 11 + 4 + 7 + 10)/5 = 40/5 = 8$

h. $L_q = \sum_{n=2}^3 (n-1)P_n = 1(11/32) + 2(1/32) = 13/32$

i. $W_q = (0 + 5 + 2 + 3 + 3)/5 = 13/5$

4. (20 points)

- a. f est linéaire, donc concave.

Posons

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, b_1 = 1, g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, b_2 = 2,$$

$$g_3(x_1, x_2) = -x_1, b_3 = 0, g_4(x_1, x_2) = -x_2, b_4 = 0.$$

Le domaine réalisable s'écrit alors comme l'intersection des quatre ensembles $\{(x_1, x_2) \mid g_i(x_1, x_2) \leq b_i\}, i=1,2,3,4$. Puisqu'un ensemble de cette forme est convexe si g_i est convexe et que l'intersection d'ensembles convexes est convexe, il suffit de démontrer que chacune des fonctions g_i est convexe.

Pour g_2, g_3 et g_4 , c'est évident, puisque ce sont des fonctions linéaires. Pour g_1 , il suffit de remarquer qu'elle s'exprime comme la somme de deux fonctions indépendantes :

$g_1(x_1, x_2) = g_1^1(x_1) + g_1^2(x_2)$, où $g_1^i(x_i) = x_i^2$. Puisque la dérivée seconde de chacune de ces deux fonctions est égale à $2 \geq 0$, elles sont convexes. La somme de fonctions convexes étant convexe, g_1 est donc convexe.

Puisque l'objectif est concave et que le domaine réalisable est convexe, il s'agit d'un modèle de programmation convexe.

- b. Les conditions de KKT pour ce modèle sont (comme il a été vu au cours, on peut éliminer les multiplicateurs associés aux contraintes de non négativité, car on peut fixer ces derniers à 0) :

$$20 - 2u_1x_1 - u_2 \leq 0$$

$$10 - 2u_1x_2 - 2u_2 \leq 0$$

$$x_1(20 - 2u_1x_1 - u_2) = 0$$

$$x_2(10 - 2u_1x_2 - 2u_2) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0$$

$$u_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

$$u_2(x_1 + 2x_2 - 2) = 0$$

(à cela, il faut ajouter les contraintes de non négativité sur toutes les variables).

- c. Si on pose $x_1 = 0$, on déduit de la première inégalité que $u_2 \geq 20$, donc que $u_2 > 0$. La dernière équation impose alors que $x_2 = 1$. De la quatrième équation, on déduit alors que $u_1 + u_2 = 5$, qui ne peut être satisfaite puisque $u_2 \geq 20$ et $u_1 \geq 0$. On a donc $x_1 > 0$.

Si on pose $x_2 = 0$, on déduit de la deuxième inégalité que $u_2 \geq 5$, donc que $u_2 > 0$. La dernière équation impose alors que $x_1 = 2$. Mais ceci contredit l'inégalité $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$. On a donc $x_2 > 0$.

Si on pose $u_1 = 0$, on déduit de la troisième équation que $u_2 = 20$ (car $x_1 > 0$) et de la quatrième équation que $u_2 = 5$ (car $x_2 > 0$), ce qui est évidemment contradictoire. On a donc $u_1 > 0$.

En posant $u_2 = 0$, on obtient les équations suivantes (puisque toutes les autres variables sont positives) :

$$20 - 2u_1x_1 = 0$$

$$10 - 2u_1x_2 = 0$$

desquelles on déduit que $u_1 = \frac{10}{x_1} = \frac{5}{x_2}$. On a donc $x_1 = 2x_2$ et $x_1^2 + x_2^2 = 1$

(puisque $u_1 > 0$). Après résolution, on obtient $x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, et on déduit

que $u_1 = 5\sqrt{5}$ et $u_2 = 0$ satisfont les conditions KKT.

Puisqu'il s'agit des conditions KKT pour un modèle de programmation convexe (pour lequel toute solution optimale locale est aussi globale), cette solution est donc optimale.

5. (20 points)

a. Voici toutes les solutions possibles, avec la distance totale associée :

1-2-3-4-5-1	34
1-2-3-5-4-1	34
1-2-4-3-5-1	36
1-2-4-5-3-1	31
1-2-5-3-4-1	30
1-2-5-4-3-1	25
1-3-2-4-5-1	32
1-3-2-5-4-1	26
1-3-4-2-5-1	28
1-3-5-2-4-1	28
1-4-2-3-5-1	37
1-4-3-2-5-1	31

b. Solution initiale : 1-2-3-4-5-1 (34)

Inversions de sous-tours :

1-4-3-2-5-1 (31)
1-3-2-4-5-1 (32)
1-2-5-4-3-1 (25)
1-2-4-3-5-1 (36)
1-2-3-5-4-1 (34)

c. À partir de la solution :

1-2-3-4-5-1 (34)

la solution obtenue par inversion de sous-tours qui améliore le plus la valeur de l'objectif est :

1-2-5-4-3-1 (25)

C'est donc la nouvelle solution à la fin de cette itération.

Si nous devons effectuer une seconde itération, nous ne trouverions aucune solution qui permette d'améliorer la valeur de l'objectif, puisque la solution est optimale (voir a). La méthode de descente s'arrêterait donc.

d. Voici les solutions et leur probabilité d'acceptation :

1-4-3-2-5-1 (31)	Prob(acceptation) = 1 (solution améliorante)
1-3-2-4-5-1 (32)	Prob(acceptation) = 1 (solution améliorante)
1-2-5-4-3-1 (25)	Prob(acceptation) = 1 (solution améliorante)
1-2-4-3-5-1 (36)	Prob(acceptation) = $e^{-(36-34)/2} = e^{-1}$
1-2-3-5-4-1 (34)	Prob(acceptation) = 1 (même valeur)