

Directives :

- La calculatrice est interdite.
- Aucune documentation n'est permise.
- L'examen est d'une durée de 2 heures.
- Vous devez d'abord remplir la feuille de présence au bas du cahier de réponses et la détacher.
- N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur la page couverture du cahier de réponses.
- Tout étudiant pris en flagrant délit de plagiat (échange d'informations entre étudiants, consultation de documentation) recevra la note 0; des sanctions plus sévères, pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'Université, pourraient s'ensuivre.

1. (30 points)

Une compagnie procède à la fabrication d'un produit dans deux usines, U1 et U2. Une fois fabriquées, des unités de ce produit sont livrées vers trois clients de la compagnie, C1, C2 et C3. Les données du problème sont représentées dans le tableau suivant, qui indique :

- pour chaque usine et chaque client, le coût (en \$) pour livrer à ce client une unité du produit provenant de cette usine;
- pour chaque client, le nombre d'unités qui doivent être livrées à ce client (Quantité demandée);
- pour chaque usine, le nombre d'unités qui doivent être produites par cette usine (Quantité produite).

	Client C1	Client C2	Client C3	Quantité produite
Usine U1	600 \$	800 \$	700 \$	400
Usine U2	400 \$	900 \$	600 \$	500
Quantité demandée	300	200	400	

Le problème consiste à déterminer combien d'unités du produit doivent être livrées à partir de chaque usine vers chaque client.

- Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.
- Votre modèle en a. est-il un problème de flot à coût minimum? Justifiez.

Supposez que votre modèle en a. soit formulé à l'aide d'un chiffrier *Excel*. Suite à la résolution du modèle par *Excel Solver*, le rapport de sensibilité suivant est obtenu :

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$D\$4	U1C1 Variable	0	100	600	1E+30	100
\$D\$5	U1C2 Variable	200	0	800	200	1E+30
\$D\$6	U1C3 Variable	200	0	700	100	200
\$D\$7	U2C1 Variable	300	0	400	100	1E+30
\$D\$8	U2C2 Variable	0	200	900	1E+30	200
\$D\$9	U2C3 Variable	200	0	600	200	100

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$G\$4	U1 Quantité_usine	400	800	400	0	200
\$G\$5	U2 Quantité_usine	500	700	500	0	200
\$G\$8	C1 Quantité_client	300	-300	300	200	0
\$G\$9	C2 Quantité_client	200	0	200	0	1E+30
\$G\$10	C3 Quantité_client	400	-100	400	200	0

Interprétez ce rapport de sensibilité pour déterminer :

- La solution optimale du problème.
- La valeur optimale du problème.
- La solution optimale du dual du problème, obtenu en associant une variable duale à chaque contrainte (**indice** : les variables duales peuvent prendre des valeurs positives, négatives ou nulle).
- La valeur optimale du dual du problème.
- De combien on peut diminuer le coût unitaire de livraison de l'usine U1 vers le client C3 sans changer la solution optimale du problème.
- De combien on peut augmenter le coût unitaire de livraison de l'usine U2 vers le client C2 sans changer la solution optimale du problème.
- De combien on peut augmenter la quantité produite à l'usine U1 sans changer la solution optimale du dual du problème.
- De combien on peut diminuer la quantité demandée par le client C2 sans changer la solution optimale du dual du problème.

2. (25 points)

- Exprimez le modèle suivant sous forme augmentée, en introduisant, si nécessaire, des variables additionnelles :

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 2x_1 & - 3x_2 & \\
 & x_1 & + 4x_2 & \leq 6 \\
 & 2x_1 & + 2x_2 & \geq -1 \\
 & x_1 & + 3x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 & & \geq 0
 \end{array}$$

- b. Quelle est la signification de chacune des variables du modèle sous forme augmentée ?
- c. Identifiez une première solution de base pour le modèle sous forme augmentée. Cette solution correspond-elle à une solution réalisable dans le modèle original ?
- d. Un de vos amis a appliqué la méthode du simplexe et affirme que le problème n'est pas réalisable. Prouvez qu'il a tort sans effectuer aucune itération de la méthode du simplexe.
- e. Une autre de vos amis a appliqué la méthode du simplexe et affirme que le problème est non borné. Prouvez qu'il a tort sans effectuer aucune itération de la méthode du simplexe.

3. (15 points)

Un avion possède trois compartiments, chacun permettant d'entreposer des marchandises : l'avant, le centre et l'arrière. Chaque compartiment a une capacité en poids (exprimée en tonnes) et en espace (exprimée en m^3), comme le précise le tableau suivant :

Compartiment	Capacité poids (tonnes)	Capacité espace (m^3)
Avant	12	7000
Centre	18	9000
Arrière	10	5000

De plus, afin d'assurer un meilleur équilibre de l'avion, on impose la contrainte que la proportion, entre deux compartiments, du poids total des marchandises transportées respecte la même proportion que les capacités en poids entre les deux mêmes compartiments.

Deux conteneurs de marchandises peuvent être transportés à bord de l'avion. Chaque conteneur est caractérisé par trois quantités, un poids (en tonnes), un volume (en m^3 /tonne) et un profit (en \$/tonne), comme le montre le tableau suivant :

Conteneur	Poids (tonnes)	Volume (m^3 /tonne)	Profit (\$/tonne)
1	20	500	320
2	16	700	400

Il est permis de transporter à bord de l'avion une fraction du poids de chacun des conteneurs. L'objectif est de déterminer les poids de chacun des conteneurs qui devraient être transportés dans l'avion et répartis entre ses trois compartiments, de façon à maximiser le profit total.

Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.

4. (20 points)

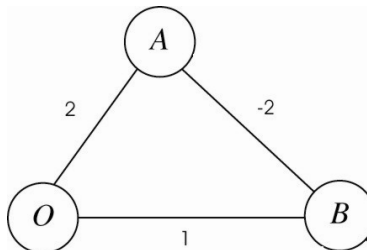
Une compagnie forestière a identifié six zones de coupe, qu'elle voudrait relier par un réseau routier. L'objectif de la compagnie est de construire des routes de façon à ce que chaque zone de coupe soit accessible à partir de n'importe quelle autre, tout en minimisant la distance totale couverte par le réseau routier. Les distances entre chaque zone de coupe sont données par le tableau suivant :

Zone de coupe	1	2	3	4	5	6
1	-	190	70	115	270	160
2	190	-	100	110	215	50
3	70	100	-	140	120	220
4	115	110	140	-	175	80
5	270	215	120	175	-	310
6	160	50	220	80	310	-

- Quel problème la compagnie cherche-t-elle à résoudre?
- Utilisez un algorithme vu au cours pour résoudre ce problème. Spécifiez le déroulement de chacune des itérations de l'algorithme.
- Déterminez les routes construites dans une solution optimale du problème, ainsi que la distance totale couverte par le réseau routier ainsi construit.

5. (10 points)

Considérez le graphe suivant, pour lequel le nombre associé à chaque arête représente la longueur de l'arête :



Exécutez l'algorithme de Dijkstra pour identifier le plus court chemin entre les sommets *O* et *B*. L'algorithme permet-il d'identifier ce plus court chemin? Justifiez.