

1. (30 points)

a. Variables

x_{ij} = nombre d'unités du produit livrées à partir de l'usine U_i ($i = 1, 2$) vers le client C_j ($j = 1, 2, 3$)

Objectif

$$\min Z = 600x_{11} + 800x_{12} + 700x_{13} + 400x_{21} + 900x_{22} + 600x_{23}$$

Contraintes fonctionnelles

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500$$

$$x_{11} + x_{21} = 300$$

$$x_{12} + x_{22} = 200$$

$$x_{13} + x_{23} = 400$$

Contraintes de non négativité

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

b. Oui, il s'agit d'un problème de flot à coût minimum. Les sommets du graphe sont les usines et les clients. Les arcs du graphe relient chaque usine à chaque client. Les usines sont les sommets d'offre et les clients les sommets de demande. Il n'y a pas de capacité sur aucun arc du graphe.

c. $x_{12} = 200, x_{13} = 200, x_{21} = 300, x_{23} = 200, x_{11} = x_{22} = 0$

d. $600.0 + 800.200 + 700.200 + 400.300 + 900.0 + 600.200 = 540000$

e. Il y a cinq contraintes, donc cinq variables duales : w_i , associée à chaque contrainte d'offre à l'usine U_i ($i = 1, 2$); u_j , associée à chaque contrainte de demande au client C_j ($j = 1, 2, 3$). La solution optimale peut être lue de la colonne « Shadow Prices » : $w_1 = 800, w_2 = 700, u_1 = -300, u_2 = 0, u_3 = -100$

f. $400.800 + 500.700 + 300.(-300) + 200.0 + 400.(-100) = 540000$

g. 200

h. Indéfiniment

i. 0

j. Indéfiniment

2. (25 points)

a. Voici le modèle sous forme augmentée :

$$\max -Z = -2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - Mx_6$$

$$x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- + x_3 = 6$$

$$-2x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- + x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - x_5 + x_6 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

b. x_1 : variable du modèle initial

x_2^+ : partie positive de x_2

x_2^- : partie négative de x_2

x_3 : variable d'écart associée à la première contrainte fonctionnelle

x_4 : variable d'écart associée à la deuxième contrainte fonctionnelle

x_5 : variable de surplus associée à la troisième contrainte fonctionnelle

x_6 : variable artificielle associée à la troisième contrainte fonctionnelle

c. Une première solution de base pour le modèle sous forme augmentée est :

$$x_3 = 6, x_4 = 1, x_6 = 3, x_1, x_2^+, x_2^-, x_5 = 0$$

Cette solution n'est pas réalisable dans le modèle d'origine, car une variable artificielle a une valeur positive.

d. Le point (0,1) satisfait toutes les contraintes, car :

$$0 + 4 \cdot 1 = 4 \leq 6$$

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \geq -1$$

$$0 + 3 \cdot 1 = 3 \geq 3$$

$$0 \geq 0$$

Le domaine réalisable n'est donc pas vide, et le problème est réalisable.

e. Puisque l'objectif consiste à minimiser, que le coefficient de x_1 dans l'objectif est positif et que le coefficient de x_2 dans l'objectif est négatif, il suffit de montrer que : 1) x_1 ne peut diminuer indéfiniment : c'est vrai, car $x_1 \geq 0$; 2) x_2 ne peut

augmenter indéfiniment : c'est vrai, car $4x_2 \leq 6 - x_1 \leq 6 \Rightarrow x_2 \leq \frac{3}{2}$

3. (15 points)

Variables

x_{ij} = poids du conteneur i ($i = 1, 2$) transporté dans le compartiment j ($j = 1, 2, 3$; 1 : avant; 2 : centre; 3 : arrière)

Objectif

$$\max Z = 320(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 400(x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

Contraintes de capacité en poids par compartiment

$$x_{11} + x_{21} \leq 12$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 18$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 10$$

Contraintes de capacité en poids par conteneur

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 16$$

Contraintes de capacité en espace

$$500x_{11} + 700x_{21} \leq 7000$$

$$500x_{12} + 700x_{22} \leq 9000$$

$$500x_{13} + 700x_{23} \leq 5000$$

Contraintes de proportion

$$18(x_{11} + x_{21}) - 12(x_{12} + x_{22}) = 0$$

$$10(x_{11} + x_{21}) - 12(x_{13} + x_{23}) = 0$$

Contraintes de non négativité

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

4. (20 points)

- a. On considère un graphe dans lequel chaque sommet correspond à une zone de coupe et il y a une arête entre chaque paire de sommets. Ce problème revient à celui de relier toutes les paires de sommets entre eux par une chaîne de façon à ce que la somme des distances des arêtes ainsi choisie soit la plus petite possible : il s'agit donc de résoudre le problème de l'arbre partiel minimum dans ce graphe.
- b. Il suffit d'exécuter l'algorithme de Prim, dont voici le déroulement (sous forme de tableau) :

<i>i</i> marqués relié à <i>j</i> non marqué	<i>j</i> non marqué le plus près	Dist	Dist min	<i>j</i> le plus près	<i>p(j)</i>
1	3	70	70	3	1
1 3	4 2	115 100	100	2	3
1 2 3	4 6 5	115 50 120	50	6	2
1 2 3 6	4 4 5 4	115 110 120 80	80	4	6
1 2 3 4 6	5 5 5 5 5	270 215 120 175 310	120	5	3

- c. Voici le sous-ensemble des arêtes correspondant à la solution du problème :
 $\{\{1,3\}, \{3,2\}, \{2,6\}, \{6,4\}, \{3,5\}\}$ (distance totale = 420)
 Ces arêtes correspondent aux routes construites dans la solution optimale.

5. (10 points)

Voici les étapes de l'algorithme de Dijkstra, représentées sous forme de tableau :

<i>i</i> marqués relié à <i>j</i> non marqué	<i>j</i> non marqué le plus près	Dist	Dist min	<i>j</i> le plus près	<i>p(j)</i>
O	B	1	1	B	O
O B	A A	2 -1	-1	A	B

On arrête car tous les sommets sont marqués (on aurait pu également arrêter après la première itération, car le sommet B est alors marqué, et on cherche le plus court chemin entre O et B). Le chemin identifié par l'algorithme correspond à l'arête entre O et B de longueur 1. Pourtant, le chemin $O \rightarrow A \rightarrow B$ est plus court, car la distance parcourue est $2 + (-2) = 0$. L'algorithme de Dijkstra ne permet donc pas d'identifier le plus court chemin (il ne fonctionne que si toutes les longueurs sont non négatives).