

Directives :

- La calculatrice est interdite.
- Aucune documentation n'est permise.
- L'examen est d'une durée de 3 heures.
- Vous devez d'abord remplir la feuille de présence au bas du cahier de réponses et la détacher.
- N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur la page couverture du cahier de réponses.
- Tout étudiant pris en flagrant délit de plagiat (échange d'informations entre étudiants, consultation de documentation) recevra la note 0; des sanctions plus sévères, pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'Université, pourraient s'ensuivre.

1. (10 points)

À chaque tirage d'un certain jeu, un joueur mise un dollar. Il peut gagner un dollar avec une probabilité $p > 0$ ou perdre un dollar avec une probabilité $1 - p$. Une partie s'arrête lorsque le joueur a perdu ou accumulé trois dollars.

- Représentez à l'aide d'un processus stochastique le nombre de dollars en possession du joueur après chaque tirage d'une même partie. Déterminez l'ensemble des états possibles.
- Le processus stochastique en a. représente-t-il une chaîne de Markov? Si c'est le cas, déterminez sa matrice de transition.

2. (15 points)

Le dirigeant d'une compagnie fabriquant un seul type de produit souhaite revoir sa politique d'inventaire, en se basant sur les données suivantes, qui montrent le nombre d'unités du produit vendues quotidiennement sur une période de 25 jours :

Nombre d'unités vendues	2	3	4	5	6
Nombre de jours	4	7	8	5	1

- Utilisez ces données pour estimer la fonction de masse associée à la variable aléatoire $X =$ nombre d'unités de produit vendues quotidiennement.
- Calculez $E(X)$.
- Effectuez une simulation des ventes quotidiennes sur trois jours. Utilisez la suite de nombres aléatoires suivante : 0,4476; 0,9713; 0,0629. Comparez la moyenne obtenue grâce à cette simulation avec la valeur obtenue en b.

3. (20 points)

Le dirigeant d'une chaîne de quatre magasins a fait l'acquisition de six lots d'un certain produit qu'il aimerait répartir entre ses magasins afin de maximiser ses profits. Le tableau suivant représente les profits estimés pour chacun des quatre magasins (M1, M2, M3 et M4) en fonction du nombre de lots alloués par magasin :

Nombre de lots	M1	M2	M3	M4
0	0	0	0	0
1	4	7	5	6
2	9	11	10	11
3	15	16	15	14
4	18	18	18	16
5	22	20	21	17
6	24	21	22	18

- Formulez ce problème afin de le résoudre par la programmation dynamique. Spécifiez les étapes, les états pour chaque étape, les variables de décision et la relation de récurrence.
- Résolvez ce problème par la programmation dynamique et identifiez toutes les solutions optimales.

4. (15 points)

Considérez le modèle de programmation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 - x_2^3 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Montrez qu'il s'agit d'un modèle de programmation convexe.
- Dérivez les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour ce modèle.
- Résolvez le système obtenu à partir des conditions KKT. Pouvez-vous en déduire une solution optimale pour ce modèle? Si oui, donnez cette solution et justifiez; si non, dites pourquoi.

Rappel : Soit un modèle général de programmation non linéaire :

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Les conditions KKT pour ce modèle s'énoncent alors ainsi : il existe des multiplicateurs u_1, u_2, \dots, u_m , tous non négatifs, tels que

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

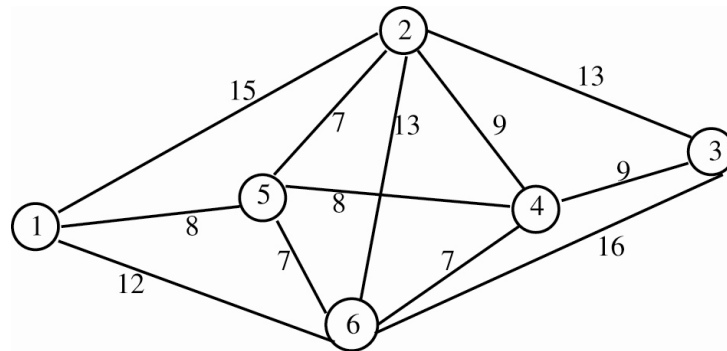
$$x_j \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_i (g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

5. (20 points)

Considérez le problème de voyageur de commerce représenté par le graphe suivant (le sommet 1 représente la ville de départ) :



- A partir de la solution 1-6-4-3-2-5-1, énumérez toutes les solutions obtenues par inversion de sous-tours.
- Effectuez une itération de la méthode de descente (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-6-4-3-2-5-1.
- Effectuez une itération de la méthode de recherche avec tabous (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-6-4-3-2-5-1.
- Supposez que nous procédions à une itération de la méthode de recuit simulé (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-6-4-3-2-5-1. Pour chaque solution candidate identifiée en a., évaluez sa probabilité d'acceptation si cette solution était générée au hasard (prenez $T = 10$ comme valeur du paramètre de température).

6. (20 points)

Le gérant d'un magasin doit sélectionner les employés à affecter à des quarts de travail pour la semaine à venir (7 jours). Il y a quatre quarts de travail les jours de semaine (du lundi au vendredi) et trois quarts de travail les jours de fin de semaine (samedi et dimanche). Un seul employé doit être affecté à chacun de ces quarts de travail. Six employés sont disponibles en tout temps, mais chaque employé ne peut être affecté à plus d'un quart de travail par jour, ni à plus de cinq quarts de travail durant la semaine. Le gérant dispose de données historiques lui permettant d'estimer pour chaque quart de travail et chaque employé le volume des ventes (en dollars). Le problème consiste à

confectionner un horaire de travail pour la semaine à venir permettant de maximiser le volume total des ventes.

- a. Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation en nombres entiers.
- b. En vous servant des contraintes *alldiff* et *element*, formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation par contraintes. **Indice** : Ajoutez, pour chaque jour de la semaine, autant de « quarts de travail » qu'il y a d'employés au repos ce jour-là.

Rappel : La contrainte $alldiff(x_1, x_2, \dots, x_n)$ impose que les n variables doivent prendre des valeurs différentes. La contrainte $element(y, [c_1, c_2, \dots, c_n], z)$ permet d'affecter à z la $y^{\text{ème}}$ valeur du vecteur $[c_1, c_2, \dots, c_n]$.