

**1. (10 points)**

- a. On définit le processus stochastique suivant, où l'indice  $t$  représente un tirage ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) :

$X_0$  = nombre de dollars en possession du joueur au début de la partie

$X_t$  = nombre de dollars en possession du joueur après le  $t^{\text{ème}}$  tirage

On peut supposer que le joueur ne joue que s'il a au moins 1 dollar et moins que 3 dollars à miser. L'ensemble des états possibles est alors : 0, 1, 2, 3.

- b. Ce processus stochastique est une chaîne de Markov car la probabilité que l'état au temps  $t+1$  corresponde à une certaine valeur dépend uniquement de l'état au temps  $t$  et non des états aux temps précédents. La matrice de transition de cette chaîne de Markov est :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**2. (15 points)**

- a.  $P(2) = 4/25$ ,  $P(3) = 7/25$ ,  $P(4) = 8/25$ ,  $P(5) = 5/25$ ,  $P(6) = 1/25$
- b.  $E(X) = 2.(4/25) + 3.(7/25) + 4.(8/25) + 5.(5/25) + 6.(1/25) = (8+21+32+25+6)/25 = 3,68$
- c. Pour effectuer la simulation, on associe des intervalles entre 0 et 1 à chaque valeur, intervalles qui correspondent à la probabilité d'obtenir cette valeur. Ainsi, si nombre aléatoire uniforme est entre :
- 0 et 0,1599, la valeur générée est 2;
  - 0,1600 et 0,4399, la valeur générée est 3;
  - 0,4400 et 0,7599, la valeur générée est 4;
  - 0,7600 et 0,9599, la valeur générée est 5;
  - 0,9600 et 0,9999, la valeur générée est 6.
- D'où : 0,4476 correspond à 4, 0,9713 correspond à 6 et 0,0629 correspond à 2. La moyenne ainsi obtenue est  $(4+6+2)/3 = 4$ , qui est plus élevée que la moyenne de 3,68 calculée en b.

**3. (20 points)**

- a. Étape  $n$  = magasin  $M_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$
- $x_n$  = nombre de lots du produit affectés au magasin  $n$
- $s_n$  = quantité de la ressource non encore affectée = nombre de lots non encore affectés ( $s_1 = 6$ )
- $p_n(x_n)$  = profit estimé suite à l'affectation de  $x_n$  lots au magasin  $n$
- $f_n^*(s_n) = \max\{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \mid x_n = 0, 1, \dots, s_n\}$  ( $f_5^*(0) = 0$ )

b. Tableau pour  $n = 4$

$s_4$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*$
0	0	0
1	6	1
2	11	2
3	14	3
4	16	4
5	17	5
6	18	6

Tableau pour  $n = 3$

$s_3$	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	6	5	-	-	-	-	-	6	0
2	11	11	10	-	-	-	-	11	0, 1
3	14	16	16	15	-	-	-	16	1, 2
4	16	19	21	21	18	-	-	21	2, 3
5	17	21	24	26	24	21	-	26	3
6	18	22	26	29	29	27	22	29	3, 4

Tableau pour  $n = 2$

$s_2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	6	7	-	-	-	-	-	7	1
2	11	13	11	-	-	-	-	13	1
3	16	18	17	16	-	-	-	18	1
4	21	23	22	22	18	-	-	23	1
5	26	28	27	27	24	20	-	28	1
6	29	33	32	32	29	26	21	33	1

Tableau pour  $n = 1$

$s_1$	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
6	33	32	32	33	31	29	24	33	0, 3

La valeur optimale est donc 33. Les solutions optimales sont :

$x_1^* = 0$  (d'où  $s_2 = 6$ ),  $x_2^* = 1$  (d'où  $s_3 = 5$ ),  $x_3^* = 3$  (d'où  $s_4 = 2$ ),  $x_4^* = 2$

$x_1^* = 3$  (d'où  $s_2 = 3$ ),  $x_2^* = 1$  (d'où  $s_3 = 2$ ),  $x_3^* = 0$  (d'où  $s_4 = 2$ ),  $x_4^* = 2$

$x_1^* = 3$  (d'où  $s_2 = 3$ ),  $x_2^* = 1$  (d'où  $s_3 = 2$ ),  $x_3^* = 1$  (d'où  $s_4 = 1$ ),  $x_4^* = 1$

#### 4. (15 points)

a.  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$

$$f_1(x_1) = x_1$$

$$f_2(x_2) = 2x_2 - x_2^3$$

$$\frac{d^2 f_1(x_1)}{dx_1^2} = 0 \Rightarrow f_1 \text{ est concave}$$

$$\frac{d^2 f_2(x_2)}{dx_2^2} = -6x_2 \leq 0 \text{ (car } x_2 \geq 0) \Rightarrow f_2 \text{ est concave}$$

$f$  étant la somme de deux fonctions concaves est donc concave.

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, b_1 = 1, g_2(x_1, x_2) = -x_1, b_2 = 0, g_3(x_1, x_2) = -x_2, b_3 = 0$$

Le domaine réalisable s'écrit alors comme l'intersection des trois ensembles  $\{(x_1, x_2) \mid g_i(x_1, x_2) \leq b_i, i = 1, 2, 3\}$ . Puisqu'un ensemble de cette forme est convexe si  $g_i$  est convexe et que l'intersection d'ensembles convexes est convexe, il suffit de démontrer que chacune des fonctions  $g_i$  est convexe. Mais ceci est évident car chacune de ces fonctions est linéaire (leur dérivée seconde s'annule).

Il s'agit donc d'un modèle de programmation convexe, puisque la fonction objectif est concave et le domaine réalisable est convexe.

- b. Les conditions de KKT pour ce modèle sont (comme il a été vu au cours, on peut éliminer les multiplicateurs associés aux contraintes de non négativité, car on peut fixer ces derniers à 0) :

$$1 - u \leq 0$$

$$2 - 3x_2^2 - u \leq 0$$

$$x_1(1 - u) = 0$$

$$x_2(2 - 3x_2^2 - u) = 0$$

$$x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$

$$u(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

(à cela, il faut ajouter les contraintes de non négativité sur toutes les variables).

- c. De la première inégalité, on tire que  $u \geq 1$ . Cela implique (en raison de la dernière égalité),  $x_1 + x_2 = 1$ . Si  $u > 1$ , alors  $x_1 = 0$  (en raison de la troisième équation) et  $x_2 = 1$ . Mais alors  $2 - 3x_2^2 - u = 0$  (en raison de la quatrième équation) impliquerait  $u = -1$ , une contradiction. On a donc  $u = 1$ . De plus, on a nécessairement que  $x_2 > 0$ , car sinon la deuxième inégalité serait violée. Ceci implique (par la quatrième équation) que  $2 - 3x_2^2 - u = 0 = 2 - 3x_2^2 - 1$ , d'où  $x_2 = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$  et  $x_1 = 1 - (\sqrt{3}/3)$  est une solution du système. On peut déduire que cette solution est optimale, car il s'agit des conditions KKT pour un modèle de programmation convexe, pour lequel toute solution optimale locale est aussi globale.

**5. (20 points)**

a. Solution initiale : 1-6-4-3-2-5-1 (56)

Solutions pouvant être obtenues par inversion de sous-tours :

1-2-3-4-6-5-1 (59)

1-6-2-3-4-5-1 (63)

1-6-3-4-2-5-1 (61)

b. Puisqu'aucune des solutions pouvant être obtenues par inversion de sous-tours ne permet d'améliorer la solution courante, la méthode de descente s'arrête immédiatement.

c. La meilleure solution dans le voisinage de la solution initiale est 1-2-3-4-6-5-1 de valeur 59. C'est donc la nouvelle solution courante. La liste tabou contient alors les éléments suivants : 1-2, 6-5.

d. 1-2-3-4-6-5-1 (59) :  $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(56-59)/10} = e^{-3/10}$

1-6-2-3-4-5-1 (63) :  $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(56-63)/10} = e^{-7/10}$

1-6-3-4-2-5-1 (61) :  $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(56-61)/10} = e^{-1/2}$

## 6. (20 points)

### a. Modèle de programmation en nombres entiers

#### Données

$v_{ijk}$  = volume des ventes en dollars pour l'employé  $i$  travaillant le quart  $k$  au jour  $j$ ,  
 $i = 1,2,3,4,5,6$ ,  $j = 1,2,\dots,7$ ,  $k = 1,2,3,4$

Note : lorsque  $j = 6,7$  (samedi, dimanche), on pose  $v_{ij4} = 0$ , puisqu'il n'y a que trois quarts ces jours-là

#### Variables

$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si le quart } k \text{ est affecté à l'employé } i \text{ le jour } j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$i = 1,2,3,4,5,6$ ,  $j = 1,2,\dots,7$ ,  $k = 1,2,3,4$

#### Objectif

$$\max Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^7 \sum_{k=1}^4 v_{ijk} x_{ijk}$$

#### Contraintes

*Chaque quart de chaque jour doit être affecté à un employé*

$$\sum_{i=1}^6 x_{ijk} = 1, \quad j = 1,2,\dots,7, k = 1,2,3,4$$

*Chaque employé ne peut être affecté plus d'un quart par jour*

$$\sum_{k=1}^4 x_{ijk} \leq 1, \quad i = 1,2,\dots,6, j = 1,2,\dots,7$$

*Chaque employé ne peut être affecté à plus de cinq quarts de travail*

$$\sum_{j=1}^7 \sum_{k=1}^4 x_{ijk} \leq 5, \quad i = 1,2,\dots,6$$

*Les variables sont toutes binaires*

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,3,4,5,6, \quad j = 1,2,\dots,7, \quad k = 1,2,3,4$$

b. Modèle de programmation par contraintes

On suppose qu'il y a autant de quarts que d'employés à chaque jour. Les quarts de chaque jour sont donc numérotés de 1 à 6, les quarts 5 et 6 étant des quarts de « repos » (la fin de semaine, les quarts 4, 5 et 6 sont des quarts de « repos »). On introduit alors les vecteurs suivants :

$$\mathbf{V}_{ij} = [v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3}, v_{ij4}, 0, 0], \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$$\mathbf{E}_{ij} = [1, 1, 1, 1, 0, 0], \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

$$\mathbf{E}_{ij} = [1, 1, 1, 0, 0, 0], \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 6, 7$$

Variables

$x_{ij}$  = numéro du quart affecté à l'employé  $i$  le jour  $j$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si l'employé } i \text{ travaille le jour } j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$z_{ij}$  = contribution à la valeur de l'objectif du quart affecté à l'employé  $i$  le jour  $j$   
 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$

Objectif

$$\max Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^7 z_{ij}$$

Contraintes

$$\text{element}(x_{ij}, \mathbf{V}_{ij}, z_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$$\text{element}(x_{ij}, \mathbf{E}_{ij}, y_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

*Chaque quart de chaque jour doit être affecté à un employé*

$$\text{alldiff}(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{6j}), \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

*Chaque employé ne peut être affecté à plus de cinq quarts de travail*

$$\sum_{j=1}^7 y_{ij} \leq 5, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

*Domaines des variables*

$$x_{ij} \in \{1, 2, \dots, 6\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$$z_{ij} \in \{0, v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3}, v_{ij4}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$