

Directives :

- La calculatrice est interdite.
- Aucune documentation n'est permise.
- L'examen est d'une durée de 2 heures.
- Vous devez d'abord remplir la feuille de présence au bas du cahier de réponses et la détacher.
- N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur la page couverture du cahier de réponses.
- Tout étudiant pris en flagrant délit de plagiat (échange d'informations entre étudiants, consultation de documentation) recevra la note 0; des sanctions plus sévères, pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'Université, pourraient s'ensuivre.

1. (20 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, répondez par **vrai ou faux**; si votre réponse est faux, justifiez pourquoi (vous n'avez pas à donner de justification lorsque votre réponse est vrai).

- a. Toute solution de base réalisable d'un modèle de programmation linéaire correspond à un point extrême du domaine réalisable.
- b. La méthode du simplexe examine tous les points extrêmes du domaine réalisable d'un modèle de programmation linéaire et choisit parmi ces points celui correspondant à la meilleure valeur de l'objectif.
- c. Lors d'un pivot de la méthode du simplexe, le critère consistant à choisir comme variable d'entrée celle ayant le plus grand coût réduit positif garantit que la solution de base obtenue suite au pivot sera réalisable.
- d. Le problème du plus court chemin entre deux sommets dans un graphe peut être formulé comme un modèle de flot à coût minimum.
- e. Dijkstra, à qui l'on doit un algorithme pour le calcul des plus courts chemins dans un graphe, est reconnu avant tout comme un spécialiste en programmation linéaire.

2. (25 points)

Une entreprise familiale vend des horloges de fabrication artisanale. David et ses deux sœurs, Diane et Lyne, travaillent à la fabrication et à la vente de deux types d'horloges : des horloges grand-père et des horloges murales. David s'occupe de l'assemblage du mécanisme de chaque horloge, Diane fabrique les caissons de bois, alors que Lyne est en charge de la prise de commandes et de la livraison des horloges. David et Diane sont disponibles jusqu'à 40 heures par semaine, alors que Lyne peut travailler jusqu'à 20 heures par semaine dans l'entreprise familiale. Les temps requis pour chaque tâche en fonction du type d'horloge, de même que les profits pour chaque type d'horloge, sont donnés dans le tableau suivant :

| Tâche | Horloge grand-père (heures/unité) | Horloge murale (heures/unité) |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| Assemblage du mécanisme | 6 | 4 |
| Fabrication des caissons de bois | 8 | 4 |
| Prise de commandes et livraison | 3 | 3 |
| Profit/unité (\$) | 300 | 200 |

Le problème consiste à déterminer combien d'horloges grand-père et d'horloges murales doivent être fabriquées à chaque semaine de façon à maximiser le profit total.

- Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.
- Formulez le dual de ce problème et proposez une interprétation de la signification des variables duales.

Supposez que votre modèle en a. soit formulé à l'aide d'un chiffrier *Excel*. Suite à la résolution du modèle par *Excel Solver*, le rapport de sensibilité suivant est obtenu :

Cellules variables

| Cellule | Nom | Finale Valeur | Réduit Coût | Objectif Coefficient | Admissible Augmentation | Admissible Réduction |
|---------|---------------------|------------------|----------------|-------------------------|----------------------------|-------------------------|
| \$C\$12 | Horloges grand-père | 3,333333333 | 0 | 300 | 100 | 100 |
| \$D\$12 | Horloges murales | 3,333333333 | 0 | 200 | 100 | 50 |

Contraintes

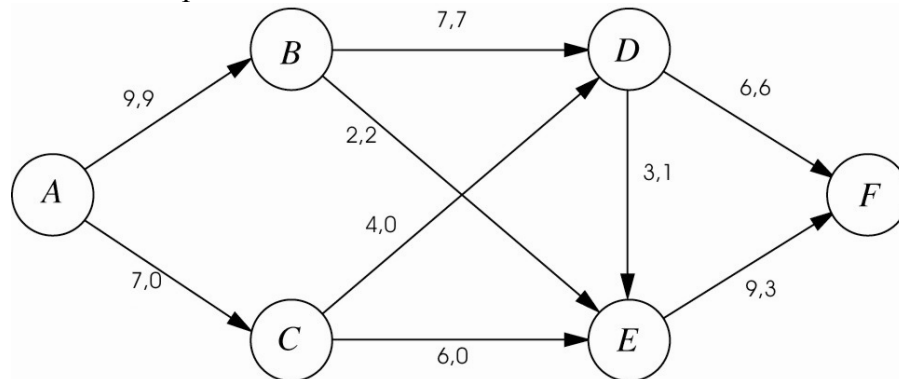
| Cellule | Nom | Finale Valeur | Ombre Coût | Contrainte à droite | Admissible Augmentation | Admissible Réduction |
|---------|----------------------------------|------------------|---------------|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| \$E\$7 | Assemblage du mécanisme | 33,33333333 | 0 | 40 | 1E+30 | 6,666666667 |
| \$E\$8 | Fabrication des caissons de bois | 40 | 25 | 40 | 13,33333333 | 13,33333333 |
| \$E\$9 | Prise de commandes et livraison | 20 | 33,33333333 | 20 | 10 | 5 |

Interprétez ce rapport de sensibilité pour déterminer :

- La solution optimale du problème.
- La solution optimale du dual.
- La valeur optimale du problème.
- La valeur optimale du dual.
- De combien on peut diminuer le profit par horloge murale sans changer la solution optimale du problème.
- De combien on peut augmenter le nombre d'heures hebdomadaires durant lesquelles Lyne peut travailler sans changer la solution optimale du dual.

3. (20 points)

Considérez le graphe orienté suivant, pour lequel les nombres u_{ij}, x_{ij} sur chaque arc (i,j) représentent la capacité et le flot sur l'arc :



- Exécutez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour calculer un flot maximum entre les sommets A et F , en utilisant comme flot initial celui représenté ci-dessus.
- Donnez la valeur du flot maximum, ainsi que le flot maximum sur chaque arc.
- En utilisant l'information tirée de la dernière itération de l'algorithme de Ford-Fulkerson, identifiez une coupe minimum et montrez que le théorème flot maximum-coupe minimum est vérifié.

4. (20 points)

QuébecAir, une compagnie de transport aérien, vise à acheter de nouveaux avions pour sa flotte. Trois types d'avions de tailles différentes sont considérés : T1, T2 et T3. Deux compagnies, C1 et C2, fabriquent de tels avions, mais une seule des deux se verra octroyer un contrat d'achat par QuébecAir. La compagnie C1 ne fabrique que des avions de tailles T1 et T2, alors la compagnie C2 ne fabrique que des avions de tailles T2 et T3. Les prix d'achat par avion sont estimés à 67 millions \$ pour T1, 50 millions \$ pour T2 et 35 millions \$ pour T3. Un investissement maximum de 1,5 milliards \$ a été autorisé par la direction de QuébecAir. Par ailleurs, les profits annuels par avion sont estimés à 4,2 millions \$ pour T1, 3 millions \$ pour T2 et 2,3 millions \$ pour T3. QuébecAir estime avoir suffisamment de personnel pour acquérir jusqu'à 30 nouveaux avions de toutes tailles. En tenant compte uniquement des coûts d'entretien des avions de taille T3, QuébecAir estime pouvoir acquérir jusqu'à 40 nouveaux avions de cette taille. Par ailleurs, la compagnie estime que les coûts d'entretien des avions de taille T2 comptent pour $4/3$ des coûts d'entretien des avions de taille T3, alors que les coûts d'entretien des avions de taille T1 valent $5/3$ des coûts d'entretien des avions de taille T3. Le problème consiste à déterminer combien d'avions de chaque taille la compagnie QuébecAir devrait acquérir afin de maximiser ses profits.

Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation en nombres entiers.

5. (15 points)

Considérez le modèle de programmation binaire suivant :

$$\begin{aligned} \max & 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ & -7x_1 + 9x_2 + 9x_3 \geq 7 \\ & x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- a. Exécutez l'algorithme de branch-and-bound en branchant selon l'ordre croissant des indices des variables (brancher d'abord sur x_1 , puis sur x_2 , et enfin sur x_3) et en choisissant lors de chaque branchement le sous-problème le plus récemment créé de plus grande borne supérieure. Représentez l'arbre obtenu, en utilisant les informations suivantes, relatives aux **relaxations PL** des sous-problèmes pouvant être générés durant l'exécution de l'algorithme :

| Variables branchées | Solution optimale | Valeur optimale |
|---------------------|-----------------------------|-----------------|
| Aucune | $x_1=1, x_2=0,83, x_3=0,72$ | 3,44 |
| $x_1=0$ | $x_1=0, x_2=0, x_3=1$ | -4 |
| $x_1=1$ | $x_1=1, x_2=0,83, x_3=0,72$ | 3,44 |
| $x_1=0, x_2=0$ | $x_1=0, x_2=0, x_3=1$ | -4 |
| $x_1=0, x_2=1$ | $x_1=0, x_2=1, x_3=0,67$ | -4,67 |
| $x_1=1, x_2=0$ | Non réalisable | - |
| $x_1=1, x_2=1$ | $x_1=1, x_2=1, x_3=0,67$ | 3,33 |

- b. Déterminez la solution optimale et la valeur optimale du modèle.