

1. (20 points)

- a. Vrai.
- b. Faux. La méthode du simplexe n'examine pas nécessairement tous les points extrêmes du domaine réalisable.
- c. Faux. Le critère consistant à choisir comme variable d'entrée celle ayant le plus grand coût réduit positif vise la plus grande augmentation marginale de l'objectif, mais ne garantit en rien la réalisabilité de la solution de base obtenue suite au pivot (c'est plutôt le choix de la variable de sortie qui intervient ici).
- d. Vrai.
- e. Faux. Dijkstra est reconnu avant comme un spécialiste dans plusieurs domaines de l'informatique, mais pas en recherche opérationnelle, et encore moins en programmation linéaire.

2. (25 points)

a. Variables

x_1 = nombre d'horloges grand-père fabriquées

x_2 = nombre d'horloges murales fabriquées

Objectif

$$\max Z = 300x_1 + 200x_2$$

Contraintes

$$6x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b. Variables

y_1 = prix (\$/heure) pour louer du temps de la ressource 1, soit David

y_2 = prix (\$/heure) pour louer du temps de la ressource 2, soit Diane

y_3 = prix (\$/heure) pour louer du temps de la ressource 3, soit Lyne

Objectif

$$\min W = 40y_1 + 40y_2 + 20y_3$$

Contraintes

$$6y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 300$$

$$4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 200$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

c. $x_1 = 10/3, x_2 = 10/3$

d. $y_1 = 0, y_2 = 25, y_3 = 100/3$

e. $300 \cdot (10/3) + 200 \cdot (10/3) = 5000/3 = 1666 + 2/3$

f. $40 \cdot 0 + 40 \cdot 25 + 20 \cdot (100/3) = 5000/3 = 1666 + 2/3$

g. 50 \$

h. 10 heures

3. (20 points)

a. Première exécution possible

Itération 1

Recherche d'un chemin d'augmentation : $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$

On augmente le flot de 2 unités le long de ce chemin

Itération 2

Recherche d'un chemin d'augmentation : $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$

On augmente le flot de 4 unités le long de ce chemin

Itération 3

Recherche d'un chemin d'augmentation : on marque successivement A, C, D, E, B et on ne peut atteindre F

Deuxième exécution possible (plus efficace)

Itération 1

Recherche d'un chemin d'augmentation : $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$

On augmente le flot de 6 unités le long de ce chemin

Itération 2

Recherche d'un chemin d'augmentation : on marque successivement A, C, D, E, B et on ne peut atteindre F

b. La valeur du flot maximum est 15.

Voici le flot sur chaque arc dans le cas de la première exécution possible :

(A,B) : 9

(A,C) : 6

(B,D) : 7

(B,E) : 2

(C,D) : 2

(C,E) : 4

(D,E) : 3

(D,F) : 6

(E,F) : 9

Voici le flot sur chaque arc dans le cas de la deuxième exécution possible :

(A,B) : 9

(A,C) : 6

(B,D) : 7

(B,E) : 2

(C,D) : 0

(C,E) : 6

(D,E) : 1

(D,F) : 6

(E,F) : 9

c. Lors de la recherche d'un chemin d'augmentation à la dernière itération (peu importe l'exécution), on marque les sommets A, C, D, E, B, qui définissent notre coupe minimum, car les arcs qui traversent cette coupe sont (D,F) et (E,F) de capacité $6+9 = 15 =$ valeur du flot maximum. Le théorème flot maximum-coupe minimum est ainsi vérifié.

4. (20 points)

Variables

x_i = nombre d'avions de taille T_i achetées par QuébecAir, $i = 1, 2, 3$

$y_j = 1$, si QuébecAir achète au moins un avion de la compagnie C_j ; 0, sinon ($j = 1, 2$)

Objectif

$$\max Z = 42x_1 + 30x_2 + 23x_3$$

Contraintes

On suppose que M est un très grand nombre

C1 ne fabrique que des avions de tailles T1 et T2

$$x_3 \leq M(1 - y_1)$$

C2 ne fabrique que des avions de tailles T2 et T3

$$x_1 \leq M(1 - y_2)$$

Une seule des deux compagnies se verra octroyer un contrat d'achat

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

Investissement maximum de 1,5 milliard \$

$$67x_1 + 50x_2 + 35x_3 \leq 1500$$

Suffisamment de personnel pour acquérir jusqu'à 30 avions

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

Coûts d'entretien

$$\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + x_3 \leq 40$$

Nature des variables

$$x_i \geq 0 \text{ et entier, } i = 1, 2, 3$$

$$y_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2$$

5. (15 points)

a. Voici l'exécution de l'algorithme à chaque itération.

Itération 0

La racine de l'arbre n'est pas élaguée, car sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière.



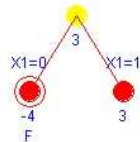
LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 0,83, 0,72), Z = 3,44.

Incumbent

Fathomed

Itération 1

On branche à la racine. Le sommet correspondant à $x_1 = 0$ est élagué, car la solution de sa relaxation PL est entière; cette solution devient donc la meilleure solution connue et on met à jour $Z^* = -4$.



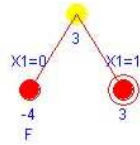
LP - Relaxation Optimal Solution: (0, 0, 1), Z = -4.

Incumbent

Fathomed

Incumbent:
X = (0, 0, 1)
Z* = -4

Le sommet correspondant à $x_1 = 1$ ne peut être élagué, puisque sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière et sa borne supérieure est $3 > -4 = Z^*$.



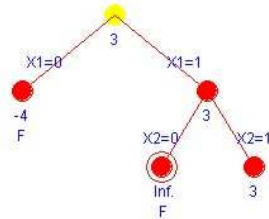
LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 0,83, 0,72), Z = 3,44.

- Incumbent
- Fathomed

Incumbent:
 $X = (0, 0, 1)$
 $Z^* = -4$

Itération 2

On branche au sommet correspondant à $x_1 = 1$, puisque c'est le seul sommet non élagué. Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 0$, est élagué puisque sa relaxation PL n'est pas réalisable.

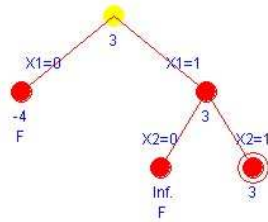


LP - Relaxation is infeasible.

- Incumbent
- Fathomed

Incumbent:
 $X = (0, 0, 1)$
 $Z^* = -4$

Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 1$ n'est pas élagué puisque sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière et sa borne supérieure est $3 > -4 = Z^*$.

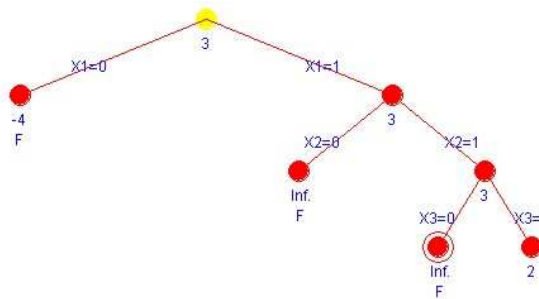


LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 1, 0,67), Z = 3,33.

<input type="checkbox"/> Incumbent	Incumbent:
<input type="checkbox"/> Fathomed	X = (0, 0, 1)
	Z* = -4

Itération 3

On branche au sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 1$, puisque c'est le seul sommet non élagué. Le sommet correspondant à $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$, est élagué, puisqu'il ne conduit à aucune solution réalisable, la deuxième contrainte étant violée par cette solution.



LP - Relaxation is infeasible.

<input type="checkbox"/> Incumbent	Incumbent:
<input checked="" type="checkbox"/> Fathomed	X = (0, 0, 1)
	Z* = -4

