

Directives :

- La calculatrice est interdite.
- Aucune documentation n'est permise.
- L'examen est d'une durée de 3 heures.
- Vous devez d'abord remplir la feuille de présence au bas du cahier de réponses et la détacher.
- N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur la page couverture du cahier de réponses.
- Tout étudiant pris en flagrant délit de plagiat (échange d'informations entre étudiants, consultation de documentation) recevra la note 0; des sanctions plus sévères, pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'Université, pourraient s'ensuivre.

1. (10 points)

Une compagnie considère sept types d'investissement. Chaque investissement peut être fait au plus une fois. Le profit estimé et le capital requis pour chaque type d'investissement est représenté par le tableau suivant (les montants sont en millions de dollars) :

Investissement	1	2	3	4	5	6	7
Profit estimé	17	10	15	19	7	13	9
Capital requis	43	28	34	48	17	32	23

Le capital total disponible pour effectuer ces investissements est de 100 millions de dollars.

De plus :

1. On ne peut faire à la fois les investissements 1 et 2;
2. On ne peut faire à la fois les investissements 3 et 4;
3. L'investissement 3 ne peut être fait que si au moins un des investissements 1 et 2 a été effectué;
4. L'investissement 4 ne peut être fait que si au moins un des investissements 1 et 2 a été effectué.

L'objectif est d'identifier la combinaison d'investissements qui maximise le profit total estimé.

Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation en nombres entiers.

2. (15 points)

Considérez le modèle de programmation binaire suivant :

$$\begin{aligned} \min & 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- a. Exécutez l'algorithme de branch-and-bound en branchant selon l'ordre croissant des indices des variables (brancher d'abord sur x_1 , puis sur x_2 , et enfin sur x_3) et en choisissant lors de chaque branchement le sous-problème le plus récemment créé de plus petite borne inférieure. Représentez l'arbre obtenu, en utilisant les informations suivantes, relatives aux **relaxations PL** des sous-problèmes pouvant être générés durant l'exécution de l'algorithme :

Variables branchées	Solution optimale	Valeur optimale
Aucune	$x_1=0, x_2=0, x_3=0,67$	4,67
$x_1=0$	$x_1=0, x_2=0, x_3=0,67$	4,67
$x_1=1$	$x_1=1, x_2=1, x_3=0$	8
$x_1=0, x_2=0$	$x_1=0, x_2=0, x_3=0,67$	4,67
$x_1=0, x_2=1$	Non réalisable	-
$x_1=1, x_2=0$	$x_1=1, x_2=0, x_3=1$	12
$x_1=1, x_2=1$	$x_1=1, x_2=1, x_3=0$	8

- b. Déterminez la solution optimale et la valeur optimale du modèle.

3. (20 points)

Considérez un système de file d'attente ayant un seul serveur. Supposez que le nombre de clients dans le système au temps t , $N(t)$, évolue selon le tableau suivant :

t (minutes)	$N(t)$
0	0
10	1
27	2
51	1
66	2
82	1
100	0

Ainsi, entre les temps $t = 0$ et $t = 10$ minutes, il n'y a pas de client dans le système, entre les temps $t = 10$ minutes et $t = 27$ minutes, il y a un client dans le système, et ainsi de suite. En vous servant de ces observations, estimez les quantités suivantes :

- a. P_0 , la probabilité qu'il n'y ait aucun client dans le système.
- b. P_1 , la probabilité qu'il y ait un client dans le système.
- c. P_2 , la probabilité qu'il y ait deux clients dans le système.
- d. P_3 , la probabilité qu'il y ait trois clients dans le système.
- e. L , le nombre moyen de clients dans le système.
- f. W , le temps moyen passé dans le système par un client.
- g. L_q , le nombre moyen de clients dans la file d'attente (excluant ceux qui sont servis).
- h. W_q , le temps moyen passé dans la file d'attente par un client (excluant le temps de service).

Note : Vous n'avez pas de calculs à effectuer. Spécifiez uniquement la formule utilisée en fonction des données du tableau.

4. (15 points)

Considérez le modèle de programmation non linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1^2 - x_1^3 + 5x_2^2 - x_2^3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\text{ entiers} \end{aligned}$$

- a. Afin de résoudre ce problème par la programmation dynamique, spécifiez les étapes, les états pour chaque étape, les variables de décision et la relation de récurrence.
- b. Résolvez ce problème par la programmation dynamique et identifiez toutes les solutions optimales.

5. (20 points)

Considérez le modèle de programmation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max f(x) &= x^3 - 60x^2 + 48x \\ 0 \leq x &\leq 30 \end{aligned}$$

- a. Montrez que la fonction f n'est ni concave, ni convexe.
- b. Montrez que f est concave sur l'intervalle $[0,20]$.
- c. Supposons que vous utilisiez la méthode de bisection pour calculer le maximum local sur l'intervalle $[0,20]$. Ce maximum local correspond-il au maximum global? Justifiez.

Supposons que vous utilisiez une méthode de recuit simulé pour résoudre ce problème. Initialement, la méthode pose comme solution courante $x = 14$, d'où $f(x) = -8344$. La température initiale est fixée à $T = 2200$.

- d. Si votre méthode génère la solution candidate $x = 8$ de valeur $f(x) = -2944$, quelle est la probabilité d'acceptation?
- e. Si votre méthode génère plutôt la solution candidate $x = 18$ de valeur $f(x) = -12744$, quelle est la probabilité d'acceptation?

Note : Pour les questions d. et e., vous n'avez pas de calculs à effectuer. Donnez uniquement l'expression de la probabilité d'acceptation.

6. (20 points)

Considérez le problème de voyageur de commerce pour lequel les distances entre les villes sont données par le tableau suivant (un tiret indique qu'il n'y a pas de lien entre deux villes) :

Ville	2	3	4	5	6	7	8
1	14	15	-	-	-	-	17
2		13	14	20	-	-	21
3			11	21	17	9	9
4				11	10	8	20
5					15	18	-
6						9	-
7							13

- A partir de la solution 1-2-3-4-5-6-7-8-1, énumérez toutes les solutions obtenues par inversion de sous-tours.
- Effectuez une itération de la méthode de descente (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-2-3-4-5-6-7-8-1.
- Effectuez une itération de la méthode de recherche avec tabous (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-2-3-4-5-6-7-8-1.
- Supposez que nous procédions à une itération de la méthode de recuit simulé (basée sur l'inversion de sous-tours) à partir de la solution 1-2-3-4-5-6-7-8-1. Pour chaque solution candidate identifiée en a., évaluez sa probabilité d'acceptation si cette solution était générée au hasard (prenez $T = 10$ comme valeur du paramètre de température).

Note : Pour la question d., vous n'avez pas de calculs à effectuer. Donnez uniquement l'expression de la probabilité d'acceptation.