

1. (10 points)

Variables

$y_i = 1$, si on choisit le type d'investissement i ; 0, sinon

Objectif

$$\max Z = 17y_1 + 10y_2 + 15y_3 + 19y_4 + 7y_5 + 13y_6 + 9y_7$$

Contraintes

Limite sur le capital total disponible

$$43y_1 + 28y_2 + 34y_3 + 48y_4 + 17y_5 + 32y_6 + 23y_7 \leq 100$$

On ne peut faire à la fois les investissements 1 et 2

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

On ne peut faire à la fois les investissements 3 et 4

$$y_3 + y_4 \leq 1$$

L'investissement 3 ne peut être fait que si au moins un des investissements 1 et 2 a été effectué

$$y_3 \leq y_1 + y_2$$

L'investissement 4 ne peut être fait que si au moins un des investissements 1 et 2 a été effectué

$$y_4 \leq y_1 + y_2$$

Intégralité

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \in \{0,1\}$$

2. (15 points)

a. Voici l'exécution de l'algorithme à chaque itération.

Itération 0

La racine de l'arbre n'est pas élaguée, car sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière.



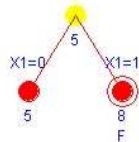
LP - Relaxation Optimal Solution: (0, 0, 0,67), Z = 4,67.

Incumbent

Fathomed

Itération 1

On branche à la racine. Le sommet correspondant à $x_1 = 1$ est élagué, car la solution de sa relaxation PL est entière; cette solution devient donc la meilleure solution connue et on met à jour $Z^* = 8$.



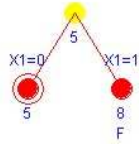
LP - Relaxation Optimal Solution: (1, 1, 0), Z = 8.

Incumbent

Fathomed

Incumbent:
X = (1, 1, 0)
Z* = 8

Le sommet correspondant à $x_1 = 0$ ne peut être élagué, puisque sa relaxation PL fournit une solution réalisable non entière et sa borne inférieure est $5 < 8 = Z^*$.



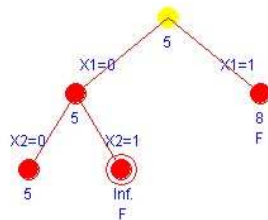
LP - Relaxation Optimal Solution: (0, 0, 0,67), Z = 4,67.

- Incumbent
- Fathomed

Incumbent:
 $X = (1, 1, 0)$
 $Z^* = 8$

Itération 2

On branche au sommet correspondant à $x_1 = 0$, puisque c'est le seul sommet non élagué. Le sommet correspondant à $x_1 = 0, x_2 = 1$, est élagué puisque sa relaxation PL n'est pas réalisable.



LP - Relaxation is infeasible.

- Incumbent
- Fathomed

Incumbent:
 $X = (1, 1, 0)$
 $Z^* = 8$

3. (20 points)

- a. $P_0 = 10/100$
 b. $P_1 = (17+15+18)/100 = 50/100$
 c. $P_2 = (24+16)/100 = 40/100$
 d. $P_3 = 0$
 e. $L = \sum_{n=1}^3 nP_n = 1(50/100) + 2(40/100) + 3(0) = 130/100 = 1,3$
 f. $W = ((51-10) + (82-27) + (100-66))/3 = (41+55+34)/3 = 130/3$
 g. $L_q = \sum_{n=2}^3 (n-1)P_n = 1(40/100) + 2(0) = 40/100 = 0,4$
 h. $W_q = (0 + (51-27) + (82-66))/3 = (0+24+16)/3 = 40/3$

4. (15 points)

- a. Étape $n =$ variable $x_n, n = 1,2$
 État $s_n =$ écart dans la contrainte $x_1 + 2x_2 \leq 4$
 Variable de décision = x_n
 Relation de récurrence

$$f_2^*(s_2) = \max \left\{ 5x_2^2 - x_2^3 \mid 0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{2}, x_2 \text{ entier} \right\}$$

$$f_1^*(s_1) = \max \left\{ 3x_1^2 - x_1^3 + f_2^*(s_2) \mid 0 \leq x_1 \leq s_1, x_1 \text{ entier} \right\}$$

$$s_1 = 4, s_2 = 4 - x_1 = s_1 - x_1, \text{ d'où } s_2 \in \{0,1,2,3,4\}$$

- b. On calcule d'abord x_2^* et $f_2^*(s_2)$

s_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	-	-	0	0
1	0	-	-	0	0
2	0	4	-	4	1
3	0	4	-	4	1
4	0	4	12	12	2

Calculons maintenant x_1^* et $f_1^*(s_1)$

s_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
4	12	6	8	0	-16	12	0

La valeur optimale est donc 12. La solution optimale (il n'y en a qu'une) est $x_1^* = 0$ (d'où $s_2 = 4$), $x_2^* = 2$.

5. (20 points)

- a. Il suffit de calculer la dérivée seconde et de montrer qu'en un point donné, elle est positive (donc, la fonction ne peut être concave) et qu'en un autre point, elle est négative (donc, la fonction ne peut être convexe).

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 120x + 48$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 6x - 120$$

Ainsi, en $x = 30$, la dérivée seconde vaut $60 > 0$, donc la fonction n'est pas concave, alors qu'en $x = 0$, la dérivée seconde vaut $-120 < 0$, donc la fonction n'est pas convexe.

- b. Il suffit de montrer que la dérivée seconde est ≤ 0 sur cet intervalle. Or, la dérivée seconde est ≤ 0 si et seulement si $6x - 120 \leq 0$ si et seulement si $x \leq 20$. Donc, f est concave sur l'intervalle $[0,20]$.
- c. Sur l'intervalle $[20,30]$, la dérivée seconde est ≥ 0 , et la fonction est donc convexe sur cet intervalle. Le maximum local est donc atteint à la frontière. Ici, la valeur en $x = 20$ est -15040 , alors que la valeur en $x = 30$ est -25560 . Le maximum local est donc atteint en $x = 20$. On peut donc conclure qu'en identifiant le maximum local sur l'intervalle $[0,20]$, celui-ci correspond au maximum global (sur l'intervalle $[0,30]$).
- d. $\text{prob}(\text{acceptation}) = 1$
- e. $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(-12744 - (-8344))/2200} = e^{-4400/2200} = e^{-2}$

6. (20 points)

a. Solution initiale : 1-2-3-4-5-6-7-8-1 (103)

Solutions pouvant être obtenues par inversion de sous-tours :

1-3-2-4-5-6-7-8-1 (107)

1-2-4-3-5-6-7-8-1 (114)

1-2-5-4-3-6-7-8-1 (112)

1-2-8-7-6-5-4-3-1 (109)

1-2-3-5-4-6-7-8-1 (108)

1-2-3-6-5-4-7-8-1 (108)

1-2-3-7-6-5-4-8-1 (108)

1-2-3-4-6-5-7-8-1 (111)

b. Puisqu'aucune des solutions pouvant être obtenues par inversion de sous-tours ne permet d'améliorer la solution courante, la méthode de descente s'arrête immédiatement.

c. La meilleure solution dans le voisinage de la solution initiale est 1-3-2-4-5-6-7-8-1 de valeur 107. C'est donc la nouvelle solution courante. La liste tabou contient alors les éléments suivants : 1-3, 2-4.

d. 1-3-2-4-5-6-7-8-1 (107) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-107)/10} = e^{-4/10}$

1-2-4-3-5-6-7-8-1 (114) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-114)/10} = e^{-11/10}$

1-2-5-4-3-6-7-8-1 (112) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-112)/10} = e^{-9/10}$

1-2-8-7-6-5-4-3-1 (109) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-109)/10} = e^{-6/10}$

1-2-3-5-4-6-7-8-1 (108) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-108)/10} = e^{-5/10}$

1-2-3-6-5-4-7-8-1 (108) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-108)/10} = e^{-5/10}$

1-2-3-7-6-5-4-8-1 (108) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-108)/10} = e^{-5/10}$

1-2-3-4-6-5-7-8-1 (111) : $\text{prob}(\text{acceptation}) = e^{(103-111)/10} = e^{-8/10}$