

Directives :

- La calculatrice est interdite.
- Aucune documentation n'est permise.
- L'examen est d'une durée de 2 heures.
- Vous devez d'abord remplir la feuille de présence au bas du cahier de réponses et la détacher.
- N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur la page couverture du cahier de réponses.
- Tout étudiant pris en flagrant délit de plagiat (échange d'informations entre étudiants, consultation de documentation) recevra la note 0; des sanctions plus sévères, pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'Université, pourraient s'ensuivre.

1. (20 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, répondez par **vrai ou faux**; si votre réponse est faux, justifiez pourquoi (vous n'avez pas à donner de justification lorsque votre réponse est vrai).

- a. Tout point extrême du domaine réalisable d'un modèle de programmation linéaire correspond à une solution de base réalisable unique.
- b. La méthode du simplexe n'examine que des points extrêmes du domaine réalisable d'un modèle de programmation linéaire.
- c. Lors d'un pivot de la méthode du simplexe, le critère pour choisir la variable de sortie garantit que la solution de base obtenue suite au pivot soit réalisable.
- d. Le problème du plus court chemin entre deux sommets dans un graphe peut être résolu par l'algorithme de Dijkstra, même lorsque certains arcs ont une distance négative.
- e. La valeur du flot maximum est égale à la capacité d'une coupe minimum.

2. (15 points)

Une raffinerie souhaite utiliser quatre types de pétrole pour produire trois sortes d'essence, A, B et C, dont les prix de vente sont, respectivement, 55 \$, 45 \$ et 35 \$ pour chaque baril vendu. L'information relative aux types pétrole est résumée dans le tableau suivant :

Type de pétrole	Quantité maximum disponible (barils/jour)	Coût (\$/baril)
1	3000	30
2	2000	60
3	4000	40
4	1000	50

L'essence A ne doit pas être composée de plus de 30% de pétrole de type 1, ni plus de 50% de pétrole de type 3, mais elle doit être composée d'au moins 40% de pétrole de type 2. L'essence B doit être composée d'au moins 10% de pétrole de type 2, mais d'au plus 50% de pétrole de type 1. L'essence C ne doit pas être composée de plus de 70% de pétrole de type 1.

Le problème consiste à déterminer combien de barils de chaque type de pétrole devraient être utilisés dans la fabrication de chacune des sortes d'essence de façon à maximiser le profit total. Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.

3. (25 points)

Une compagnie d'alimentation dispose de 1000 kilos de café africain, 2000 kilos de café brésilien et 500 kilos de café colombien. Elle ensache deux sortes de café. La première sorte, « Doux réveil », est un mélange à parties égales de café africain et brésilien et se vend à 6 \$ le kilo. La deuxième sorte, « Arôme velouté », est un mélange de trois parties de café brésilien pour une partie de café colombien et se vend à 8 \$ le kilo.

Le problème consiste à déterminer quelle quantité de café de chaque sorte la compagnie devrait ensacher de façon à maximiser son profit.

- Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.
- Formulez le dual de ce problème et proposez une interprétation de la signification des variables duales.

Supposez que votre modèle en a. soit formulé à l'aide d'un chiffrier *Excel*. Suite à la résolution du modèle par *Excel Solver*, le rapport de sensibilité suivant est obtenu :

Cellules variables						
Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$C\$12	Doux réveil	2000	0	6	1E+30	0,666666667
\$D\$12	Arôme velouté	1333,333333	0	8	1	8

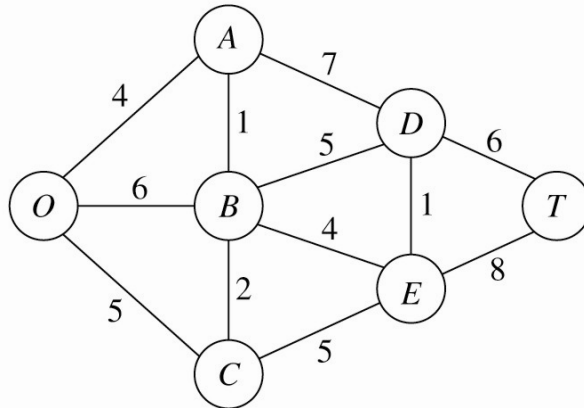
Contraintes						
Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$E\$7	Café africain	1000	1,333333333	1000	1000	500
\$E\$8	Café brésilien	2000	10,66666667	2000	500	1000
\$E\$9	Café colombien	333,3333333	0	500	1E+30	166,6666667

Interprétez ce rapport de sensibilité pour déterminer :

- c. La solution optimale du problème.
- d. La solution optimale du dual.
- e. La valeur optimale du problème.
- f. La valeur optimale du dual.
- g. De combien on peut diminuer le prix par kilo du mélange « Doux réveil » sans changer la solution optimale du problème.
- h. De combien on peut augmenter la quantité disponible de café colombien sans changer la solution optimale du dual.

4. (20 points)

Considérez le graphe non orienté suivant, pour lequel le nombre sur chaque arête représente une distance. On définit la *distance* d'un sous-ensemble quelconque d'arêtes comme étant la somme des distances des arêtes appartenant à ce sous-ensemble.



- a. Supposons qu'on veuille relier le sommet O à chacun des autres sommets par une chaîne de telle sorte que, pour chaque sommet j , on minimise la distance du sous-ensemble composé de la *chaîne reliant* O à j . Quel problème cherche-t-on alors à résoudre?
- b. Utilisez un algorithme vu au cours pour résoudre ce problème. Spécifiez le déroulement de chacune des itérations de l'algorithme.
- c. Déterminez le sous-ensemble des arêtes correspondant à la solution de ce problème. Ce sous-ensemble d'arêtes forme-t-il un arbre partiel du graphe? Si c'est le cas, s'agit-il d'un arbre partiel minimum? Justifiez.

5. (20 points)

Une compagnie envisage de fabriquer deux nouveaux produits, J1 et J2, pour la période des fêtes de Noël. La compagnie possède deux usines, U1 et U2, pouvant produire ces jouets. Cependant, pas plus d'une de ces deux usines ne peut être utilisée. Les données du problème sont représentées dans le tableau suivant, qui indique :

- pour chaque jouet et chaque usine, le nombre de jouets pouvant être produits en une heure;
- pour chaque usine, la capacité, soit le nombre d'heures pouvant être consacrées à la fabrication des deux jouets, avant la période des fêtes de Noël;
- pour chaque jouet, le profit par unité (en \$);
- pour chaque jouet, le coût fixe encouru dès qu'une unité est fabriquée (en \$).

Usine	J1 (unités/heure)	J2 (unités/heure)	Capacité (heures)
U1	50	40	500
U2	40	25	700
Profit/unité (\$)	10	15	
Coût fixe (\$)	50 000	80 000	

Le problème consiste à décider d'un plan de production qui maximise le profit total. Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation en nombres entiers.