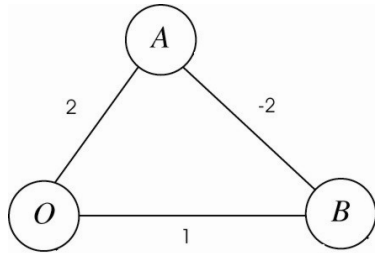


1. (20 points)

- a. Faux. Un point extrême du domaine réalisable d'un modèle de programmation linéaire peut correspondre à plusieurs solutions de base réalisables.
- b. Vrai.
- c. Vrai.
- d. Faux. Si certains arcs ont une distance négative, l'algorithme de Dijkstra peut ne pas identifier le plus court chemin entre deux sommets. Par exemple, prenons le graphe suivant :



Le plus court chemin de O à B est de longueur 0 et passe par A, alors que l'algorithme de Dijkstra identifie plutôt le chemin de longueur 1 correspondant à l'arête entre O et B.

- e. Vrai.

2. (15 points)

Variables

x_{ij} = nombre de barils de pétrole de type i ($i = 1, 2, 3, 4$) utilisées dans la fabrication de l'essence j ($j = A, B, C$)

Objectif

$$\max Z = 55(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}) + 45(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}) + 35(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C}) - 30(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) - 60(x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) - 40(x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) - 50(x_{4A} + x_{4B} + x_{4C})$$

ou encore, après regroupement des termes semblables,

$$\max Z = 25x_{1A} - 5x_{2A} + 15x_{3A} + 5x_{4A} + 15x_{1B} - 15x_{2B} + 5x_{3B} - 5x_{4B} + 5x_{1C} - 25x_{2C} - 5x_{3C} - 15x_{4C}$$

Contraintes de capacité

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 3000$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 2000$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 4000$$

$$x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} \leq 1000$$

Contraintes de mélange

$$x_{1A} \leq 0.3(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A})$$

$$x_{3A} \leq 0.5(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A})$$

$$x_{2A} \geq 0.4(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A})$$

$$x_{2B} \geq 0.1(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B})$$

$$x_{1B} \leq 0.5(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B})$$

$$x_{1C} \leq 0.7(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C})$$

ou encore, après regroupement des termes semblables,

$$0.7x_{1A} - 0.3x_{2A} - 0.3x_{3A} - 0.3x_{4A} \leq 0$$

$$-0.5x_{1A} - 0.5x_{2A} + 0.5x_{3A} - 0.5x_{4A} \leq 0$$

$$0.4x_{1A} - 0.6x_{2A} + 0.4x_{3A} + 0.4x_{4A} \leq 0$$

$$0.1x_{1B} - 0.9x_{2B} + 0.1x_{3B} + 0.1x_{4B} \leq 0$$

$$0.5x_{1B} - 0.5x_{2B} - 0.5x_{3B} - 0.5x_{4B} \leq 0$$

$$0.3x_{1C} - 0.7x_{2C} - 0.7x_{3C} - 0.7x_{4C} \leq 0$$

Contraintes de non négativité

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = A, B, C$$

3. (25 points)

a. Variables

x_1 = nombre de kilos de café « Doux réveil » ensachés par la compagnie

x_2 = nombre de kilos de café « Arôme velouté » ensachés par la compagnie

Objectif

$$\max Z = 6x_1 + 8x_2$$

Contraintes

$$\frac{1}{2}x_1 \leq 1000$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \leq 2000$$

$$\frac{1}{4}x_2 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b. Variables

y_1 = prix (\$/kilo) pour louer des kilos de la ressource 1, soit le café africain

y_2 = prix (\$/kilo) pour louer des kilos de la ressource 2, soit le café brésilien

y_3 = prix (\$/kilo) pour louer des kilos de la ressource 3, soit le café colombien

Objectif

$$\min W = 1000y_1 + 2000y_2 + 500y_3$$

Contraintes

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \geq 6$$

$$\frac{3}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3 \geq 8$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

c. $x_1 = 2000, x_2 = 1333 \frac{1}{3}$

d. $y_1 = 4/3, y_2 = 32/3, y_3 = 0$

e. $6.(2000) + 8.(1333 \frac{1}{3}) = 2666 \frac{2}{3}$

f. $1000.(4/3) + 2000.(32/3) + 500.0 = 2666 \frac{2}{3}$

g. $2/3$ \$ (ou 66 cents)

h. indéfiniment

4. (20 points)

- a. Ce problème revient à celui de trouver les plus courtes chaînes reliant O à chacun des autres sommets.
 b. Il suffit d'exécuter l'algorithme de Dijkstra, dont voici le déroulement (sous forme de tableau) :

i marqués relié à j non marqué	j non marqué le plus près	Dist	Dist min	j le plus près	$p(j)$
O	A	4	4	A	O
O A	C B	5 5	5 5	C B	O A
A B C	D E E	11 9 10	9	E	B
A B E	D D D	11 10 10	10 10	D D	B E
D E	T T	16 17	16	T	D

Voici les plus courtes chaînes obtenues pour chaque sommet :

A : $O \rightarrow A$ (distance = 4)

B : $O \rightarrow A \rightarrow B$ (distance = 5)

C : $O \rightarrow C$ (distance = 5)

D : $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D$ ou $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ (distance = 10)

E : $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E$ (distance = 9)

T : $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ ou $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ (distance = 16)

- c. Voici le sous-ensemble des arêtes correspondant à la solution du problème :

$\{\{O,A\}, \{O,C\}, \{A,B\}, \{B,E\}, \{D,E\}, \{D,T\}\}$ (distance = 21)

Autre solution :

$\{\{O,A\}, \{O,C\}, \{A,B\}, \{B,D\}, \{B,E\}, \{D,T\}\}$ (distance = 25)

Oui, ce sous-ensemble d'arêtes forme un arbre partiel du graphe. Il ne s'agit pourtant pas de l'arbre partiel minimum, car voici un autre arbre partiel dont la distance, 18, est plus petite (il s'agit en fait de l'arbre partiel minimum) :

$\{\{O,A\}, \{A,B\}, \{B,C\}, \{B,E\}, \{D,E\}, \{D,T\}\}$

5. (20 points)

Variables

x_i = nombre d'unités du jouet J_i produites

$y_i = 1$, si au moins une unité du jouet J_i est produite; 0, sinon

$z = 1$, si l'usine U1 sert à produire des jouets; 0, sinon

Objectif

$$\max Z = 10x_1 + 15x_2 - 50000y_1 - 80000y_2$$

Contraintes

Liens entre les variables x et y

$$x_1 \leq My_1$$

$$x_2 \leq My_2$$

Capacités de production aux usines et pas plus d'une usine utilisée

$$x_1/50 + x_2/40 \leq 500 + M(1 - z)$$

$$x_1/40 + x_2/25 \leq 700 + Mz$$

Intégralité

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers, } y_1, y_2, z \in \{0,1\}$$