

à remettre le 1er octobre 2002

1 _____ (20 points)

Considérez le problème de programmation linéaire suivant ne comportant qu'une seule contrainte:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

où $a_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Démontrez que s'il existe au moins un indice j tel que $c_j < 0$, alors une solution optimale de ce problème est:

$$x_k = \frac{b}{a_k}, \quad x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, j \neq k,$$

où

$$k = \arg \min_{1 \leq j \leq n} \frac{c_j}{a_j}.$$

2 _____ (20 points)

Considérez le problème de programmation linéaire suivant ne comportant qu'une seule contrainte:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

où $b > 0$ et $a_j > 0$, pour au moins un indice j , $1 \leq j \leq n$.

a) Déterminez une première solution de base réalisable sans avoir recours à une phase I.

b) Soit x_k une variable de base d'une solution de base réalisable. Démontrez que s'il existe un indice $j \neq k$ tel que $a_j < 0$ et $a_k c_j - a_j c_k < 0$, alors le problème est non-borné.

3 _____ **(20 points)**

Considérez le problème de programmation linéaire sous forme standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

où A est une matrice $m \times n$ ($m \leq n$) de plein rang. Supposons que $\sum_{j=1}^n x_j \leq S$, quelque soit $x \in \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Soit une solution de base réalisable de valeur z et pour laquelle \bar{c} est le vecteur des coûts réduits. Si z^* dénote la valeur optimale du problème, démontrez que

$$z - z^* \leq S \max_{1 \leq j \leq n} \{-\bar{c}_j\}.$$

4 _____ **(20 points)**

Considérez le problème de programmation linéaire sous forme standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

où A est une matrice $m \times n$ ($m \leq n$) de plein rang. Supposons que ce problème soit non-dégénéré et qu'il possède une solution optimale de valeur finie z^* . Soit A_B une base réalisable de A et soit x_j une variable hors-base relativement à A_B telle que $\bar{c}_j = c_j - c_B A_B^{-1} a_{.j} > 0$, où c_B est le vecteur des coûts des variables de base. Démontrez que si $A_B^{-1} a_{.j} \geq 0$, alors x_j sera une variable hors-base dans la solution optimale.

5 _____ **(20 points)**

Considérez le problème suivant:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx, \\ & Ax \geq b, \\ & Ex \geq d, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Soit x^* une solution de base optimale pour ce problème. Relativement à cette base optimale, dénotons par π^* le vecteur des multiplicateurs du simplexe associés aux contraintes $Ax \geq b$ et par ω^* le vecteur des multiplicateurs du simplexe associés aux contraintes $Ex \geq d$. Démontrez que x^* est aussi une solution optimale du problème suivant:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx - \pi^* Ax, \\ & Ex \geq d, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$