

à remettre le 22 octobre 2003

1 _____ (20 points)

Considérez le problème suivant:

$$\begin{aligned} \min f(x), \\ f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Démontrez que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \pi_i \nabla f_i(x) &\geq 0, \\ x[\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \pi_i \nabla f_i(x)] &= 0, \\ \pi_i f_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x &\geq 0, \\ \pi_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

2 _____ (20 points)

Soit X un ouvert, soit $D = \{x \in X \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$, le domaine réalisable, et soit $\delta D = \{x \in X \mid \exists i, \quad i = 1, \dots, m, \quad f_i(x) = 0\}$. Supposons que f_i sont des fonctions linéaires de la forme: $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$. Démontrez qu'en tout point $x \in \delta D$, les fonctions f_i , $i = 1, \dots, m$, satisfont les restrictions sur les fonctions de contraintes.

3 _____ (20 points)

Soient $S = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ et $T = \{y \mid yA \leq c, y \geq 0\}$. Démontrez que si ces deux ensembles ne sont pas vides, alors au moins un des deux est non borné. Les deux ensembles peuvent-ils être non bornés?

4 _____ (20 points)

Démontrez que la fonction lagrangienne $g(\lambda) = \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ est une fonction concave sur l'ensemble $\{\lambda \geq 0, \quad g(\lambda) > -\infty\}$. (Une fonction à valeurs réelles f définie sur un ensemble convexe est concave si $-f$ est convexe.)

5 _____ (20 points)

Appliquez la définition du dual lagrangien à un modèle de programmation linéaire pour retrouver le dual d'un modèle de programmation linéaire.