

à remettre le 5 novembre 2003

1 _____ (20 points)

Considérez le problème de programmation linéaire sous forme standard:

$$\min cx,$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0,$$

où A est une matrice $m \times n$ ($m \leq n$) de plein rang. Si ce problème est non-borné inférieurement, démontrez que l'ensemble $\{x \mid Ax = 0, x \geq 0, x \neq 0, cx < 0\}$ n'est pas vide et construisez un élément de cet ensemble à partir du dernier tableau du simplexe (celui où nous avons constaté que le problème est non-borné inférieurement).

2 _____ (20 points)

Dans la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, démontrez qu'à chaque fois que les sous-problèmes sont résolus, leur valeur optimale est toujours inférieure ou égale à 0.

3 _____ (20 points)

Résolvez le problème de programmation linéaire suivant avec la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe:

$$\min -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$-x_3 + x_4 \leq 3,$$

$$x_3 + x_4 \leq 5,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Considérez le problème du multiflot à coût minimum, défini sur un réseau orienté $G = (V, A)$: étant donné un ensemble de paires origine-destination K , on cherche à satisfaire une demande $d_k > 0$ allant de l'origine, notée $O(k)$, vers la destination, notée $D(k)$, pour chaque paire $k \in K$, tout en tenant compte de capacités $u_{ij} > 0$ sur chaque arc (i, j) . Le problème est de trouver un flot qui permet de satisfaire les demandes et de respecter les capacités tout en minimisant la somme des coûts de transport du flot sur chaque arc, où $c_{ij} \geq 0$ est le coût unitaire de transport du flot sur chaque arc (i, j) .

- a) Supposons que, pour chaque paire $k \in K$, tous les chemins simples (sans circuit) allant de $O(k)$ à $D(k)$ soient connus et représentés par l'ensemble P^k . Formulez le problème à l'aide des seules variables x_p^k , qui représentent la fraction de la demande d^k passant par le chemin $p \in P^k$.
- b) Votre formulation en a) possédant un très grand nombre de variables, proposez une approche de restriction pour la résoudre. En particulier, précisez quels sont les sous-problèmes et comment vous pourriez les résoudre, et spécifiez comment obtenir un problème maître restreint initial (vous pouvez supposer que le problème est réalisable).