

à remettre le 24 novembre 2003

1 _____ (20 points)

Expliquez les modifications à apporter à la méthode de décomposition de Benders pour arrêter la procédure lorsqu'une solution ϵ -optimale est identifiée (i.e. il existe une solution réalisable de valeur $\bar{z} \leq z^* + \epsilon$, où z^* est la valeur optimale cherchée et $\epsilon > 0$ est un paramètre).

2 _____ (20 points)

Considérez le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx, \\ & Ax \geq b, \\ & Dx \geq e, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Supposez que l'ensemble $P = \{x \mid Dx \geq d, x \geq 0\}$ est un polytope (i.e. P ne possède aucun rayon extrême). Transformez le dual de ce problème en un problème équivalent obtenu par la reformulation de Benders. Démontrez que cette dernière reformulation est le dual du problème suivant:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in K} \lambda_k (cx_k), \\ & \sum_{k \in K} \lambda_k (Ax_k) \geq b, \\ & \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \\ & \lambda_k \geq 0, \quad k \in K, \end{aligned}$$

où $\{x_k\}_{k \in K}$ est l'ensemble des points extrêmes de P .

3 _____ (20 points)

Résolvez le problème de programmation linéaire suivant avec la méthode de décomposition de Benders:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2, \\ & -x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 \geq 3, \\ & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Considérez y_1 et y_2 comme les variables "difficiles à traiter"; lors de la première itération, prenez uniquement la contrainte correspondant au point extrême (1,4) du polyèdre du dual du sous-problème.

Considérez le problème suivant, défini sur un réseau orienté $G = (V, A)$: on cherche à satisfaire une demande $d > 0$ allant d'une origine, notée s , vers une destination, notée t , tout en tenant compte de capacités $u_{ij} > 0$ sur chaque arc (i, j) . De plus, chaque fois qu'un arc (i, j) est utilisé, on compte un coût fixe f_{ij} et on désire que la somme des coûts fixes des arcs utilisés ne dépasse pas une certaine limite budgétaire $B > 0$. Le problème est de trouver un flot qui permet de satisfaire la demande et de respecter les contraintes de capacités et de budget, tout en minimisant la somme des coûts de transport du flot sur chaque arc, où $c_{ij} \geq 0$ est le coût unitaire de transport du flot sur chaque arc (i, j) .

- a) Formulez ce problème à l'aide des seules variables suivantes, définies pour chaque arc (i, j) : x_{ij} , qui représente le flot sur l'arc (i, j) , et y_{ij} , qui prend la valeur 1 si $x_{ij} > 0$, et la valeur 0 sinon.
- b) Donnez la reformulation de Benders de votre modèle en a). En particulier, précisez quel est le sous-problème et comment vous pourriez le résoudre.