

Graphes triangulés

version 1.0

06.04.2016

Cette partie concerne des graphes simples et finis. Pour l'exercice, vous pouvez réfléchir aux graphes infinis dans ce contexte.

Definition 1 *Un graphe simple $G = (V, E)$ est triangulé si tout cycle de longueur au moins 4 possède une corde, c'est-à-dire, une arête entre deux sommets non-consécutifs du cycle.*

En particulier, tout graphe induit par les sommets d'un cycle de longueur 4 ou 5 contient un sommet adjacent à tous les autres sommets du cycle. On dit aussi *cordal*.

Observation 1 *Tout sousgraphe induit d'un graphe triangulé est également triangulé.*

Lemma 1 *Dans un graphe triangulé, tout ensemble séparateur minimal est une clique.*

Démonstration : Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé. S'il est complet, un ensemble séparateur minimal $G - u$ pour $u \in V$ et est complet. Soit x, y deux sommets non-adjacents de G et soit $S \subset V$ un ensemble minimal tel que x et y sont dans deux composantes connexe distinctes dans $G - S$, disons X et Y , respectivement. Par la minimalité de S on a que tout $u \in S$ est adjacent à un sommet $x_u \in X$ et un sommet $y_u \in Y$. Soit $u, v \in S$. Soit P_X (P_Y) une chaîne la plus courte entre u et v dont les sommets internes sont dans X (Y). Le cycle $P_X P_Y$ est de longueur au moins 4 et doit avoir une corde. Par la minimalité de P_X et de P_Y et le fait $(X, Y) =$, la seule possibilité est que $uv \in E$. On conclut que S est une clique. \square

Rappelons qu'une clique $C \in V$ est un ensemble de sommets tel que $G[C]$ est un graphe complet et que $(X, Y) = \{xy \in E : x \in X, y \in Y\}$.

Definition 2 *Un sommet u d'un graphe $G = (V, E)$ est simplicial si $G[N(u)]$ est complet (et donc $G[N[u]]$ l'est aussi).*

Proposition 1 *Tout graphe triangulé non-complet possède au moins deux sommets simpliciaux non-adjacents.*

Démonstration : On vérifie facilement que l'énoncé est vrai pour tout graphe triangulé non-complet avec moins que 4 sommets. Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé avec au moins 4 sommets et supposons l'énoncé vrai pour tout graphe triangulé avec moins que $|V|$ sommets. Soit x, y deux sommets non-adjacents de G et soit $S \subset V$ un ensemble minimal tel que x et y sont dans deux composantes connexe distinctes de $G - S$, disons X et Y , respectivement. Par la minimalité de S et le lemme 1, le graphe induit par S est complet. Soit G_X (G_Y) le sous-graphe de G induit par $S \cup V(X)$ ($S \cup V(Y)$). Par l'observation 1, ils sont tous les deux triangulés et possèdent chacun deux sommets simpliciaux non-adjacents s'ils ne sont pas complets. Soit H un de G_X, G_Y . Si H est complet, n'importe quel sommet de H est simplicial et on en peut en choisir un qui n'est pas dans S . Si H n'est pas complet, on peut également choisir un sommet simplicial de H qui n'est pas dans S car S est une clique. Les sommets ainsi choisis dans G_X et G_Y reste simpliciaux dans G et ne sont pas adjacents. \square

Definition 3 *Un ordre délimination simplicial d'un graphe $G = (V, E)$ avec n sommets est une énumération de V en v_1, v_2, \dots, v_n telle que v_i est simplicial dans le sous graphe induit par v_1, \dots, v_i .*

Theorem 1 *Un graphe est triangulé si et seulement si il admet un ordre délimination simplicial.*

Démonstration : La proposition 1 nous fournit un ordre d'élimination simplicial : si $G_n = G$, on définit, pour $i = n, n - 1, \dots, 2$, v_i comme un des sommets simpliciaux de G_i et on définit $G_{i-1} = G_i - v_i$. Bien sûr, v_1 sera le seul sommet de G_1 .

Soit $G = (V, E)$ un graphe qui admet un ordre délimination simplicial v_1, \dots, v_n . Soit $C = v_{i_1} \dots v_{i_k}$ un cycle de longueur $k \geq 4$ dans G est soit $j = \max\{i_1, \dots, i_k\}$. puisque v_j est simplicial dans G_{v_1, \dots, v_j} , les deux voisins de v_j sur C sont adjacents, i.e. forment une corde. On conclut que G est triangulé. \square

On a vu qu'un graphe réflexif $G = (V, E)$ est cop-win si et seulement si ses sommets peuvent être ordonnés v_1, \dots, v_n de manière à ce que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe un $j \in \{1, \dots, n\}$, $j < i$, tel que $N_i[v_i] \subseteq N_i[v_j]$, avec $N_i[v] = N[v] \cap \{v_1, \dots, v_i\}$. Notons que l'ordre est inversé par rapport à celui que nous avons vu avant, mais c'est équivalent (exercice?).

Proposition 2 *Tout graphe triangulé est cop-win.*

Démonstration : Exercice.

Rappel : $\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ est un clique de } G\}$.

Proposition 3 *Si G est un graphe triangulé alors $\chi(G) = \omega(G)$.*

Démonstration : Exercice.