

IFT2810 – Devoir1
À remettre le mardi 6 octobre 2009

1. Techniques de preuve(10 points)

- a) Démontrez par induction que $n^3 + 2n$ est divisible par 3, pour tout $n \geq 0$.
- b) Montrez que si n est divisible par 3 alors $n - 3$ est aussi divisible par 3.

2. Analyse de Complexité

2.1 (10 points)

- a) Montrer formellement que $3(n^2 + 2)^3 + n \log(n^2)$ est $\mathcal{O}(n^6)$.
- b) Suppose qu'un algorithme A exécute $100n + 636$ opérations, alors que l'algorithme B en exécute n^2 . Déterminer le plus petit entier n_0 tel que A exécute moins d'opérations que B , pour tout $n \geq n_0$.

2.2 (20 points) Pour chacun des algorithmes suivants, trouver ce qu'il calcule, faire une analyse du temps d'exécution et exprimer cette complexité en utilisant la notation \mathcal{O} .

- a) Algorithme Un($a > 0, n \geq 0$ deux entiers)

```
- retourne?  
  k ← 0  
  b ← 1  
  TANT QUE k < n FAIRE  
    k ← k + 1  
    b ← b * a  
  FIN TANT QUE  
  RETOURNER b
```

- b) Algorithme Deux(a : vecteur de taille n)

```
- retourne?.  
  p ← 0  
  i ← 0  
  k ← 0  
  TANT QUE k < n FAIRE  
    SI a[k] ≡ 0 mod 2  
      ALORS p ← p + 1  
    SINON  
      i ← i + 1  
    FIN SI  
    k ← k + 1  
  FIN TANT QUE  
  RETOURNER(p, i)
```

3. Piles et Files(20 points)

- a) Décrivez, en pseudocode, un algorithme linéaire qui inverse une file F . (Vous pouvez utiliser une structure de données auxiliaire.)

- b) Décrivez comment implémenter deux piles en utilisant une seule liste. Le nombre total d'éléments dans les deux piles est limité par la longueur de la liste. La complexité en temps de toutes les opérations de piles doit être constante.

4. Définitions et algorithmes récursifs (20 pts)

Un *palindrome* sur un alphabet A est une chaîne de caractères qui se lit de la même manière de gauche à droite que de droite à gauche. Par exemple, les chaînes a , aba , $abba$ et $aaaa$ sont des palindromes sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, alors que $abab$ et baa n'en sont pas.

- a) Donnez une définition récursive de l'ensemble des palindromes sur $\{a, b\}$.
b) Donnez un algorithme récursif qui, étant donné un mot de longueur n , retourne vrai si ce mot est un palindrome et faux, sinon.

5. Arbres Binaires (20 pts)

Un village d'Anglesey (petite île au sud-ouest de l'Angleterre) porte l'un des plus long nom au monde :

Llanfairpwllgwyngyllgogerychwyrndrobwlllantysiliogogoch

Les habitants du village sont fiers de ce merveilleux nom mais réalisent, avec tristesse, que (certainement par manque de bois!) toutes les affiches annonçant leur village ne contiennent qu'une toute petite partie du nom originale : "Llanfairpwll". Pour être certain de préserver leur héritage culturel, ils décident d'encoder le nom original de leur village en une séquence de bits. Bien entendu, ils veulent que cette séquence soit la plus courte possible.

- a) Faire un tableau de la fréquence d'apparitions de chacune des lettres apparaissant dans le nom du village. ("L" et "l" considérées comme étant la même lettre, fréquence=nombre d'occurrences de la lettre divisé par longueur du mot).
b) Utiliser ce tableau pour construire, avec l'algorithme de Huffman, l'arbre binaire donnant le meilleur codage. (Lorsque plusieurs arbres ont le même poids -ici poids = fréquence- choisir les arbres selon l'ordre lexicographique)
c) Donner un tableau associant à chacune des lettres son code binaire.
d) Quel est le nombre de bits minimal nécessaire pour encoder le nom de ce charmant village.

Pour les curieux : Ce nom de village n'est pas une invention !! Le nom date du 19^{ème} siècle et se traduit, plus ou moins, comme : " St Mary's church in the hollow of the white hazel near a rapid whirlpool and the church of St Tysilio of the red cave " (voir <http://www.bbc.co.uk/h2g2/guide/A403642>). Le nom complet du village n'est maintenant utilisé que pour impressionner les touristes. Le nom "Llanfairpwll" est utilisé par les habitants.

-
- Ce travail doit se faire seul.
- Aucun plagiat ne sera accepté.