

**IFT2015 – Structures de données**  
**Devoir 1, session automne 2009**

**À remettre le mardi 6 octobre, avant 16 :00**

---

**1. Analyse de Complexité (10 points)**

Démontrez formellement les énoncés suivants s'ils sont vrais ou donnez des contre-exemples s'ils sont faux.

- a) Si  $f_1(n)$  est  $\mathcal{O}(g_1(n))$  et  $f_2(n)$  est  $\mathcal{O}(g_2(n))$ , alors  $\frac{f_1(n)}{f_2(n)}$  est  $\mathcal{O}\left(\frac{g_1(n)}{g_2(n)}\right)$
- b) Si on peut trouver un entier  $k$  tel que pour tout  $n > k$ ,  $f_1(n) \leq f_2(n)$  alors  $f_1(n) + f_2(n)$  est  $\mathcal{O}(f_2(n))$ .

**2. Techniques de preuves**

**2.1 (10 points)** Utilisez le principe de l'induction pour prouver les énoncés suivants :

- a)  $n^2 - 7n + 12$  est non négatif lorsque  $n$  est un entier plus grand que 3.
- b)  $n^2 - 1$  est divisible par 8 lorsque  $n$  est un entier positif impair. (Attention, ici on veut montrer que l'énoncé est vrai pour tout  $n$  impair et non pour tout  $n$ ).

**2.2 (5 points)** Démontrez que la somme de deux nombres impairs est paire.

**2.3 (5 points)** Démontrez que l'on peut former un affranchissement de  $n$  cents, en utilisant seulement des timbres de 3 et 5 cents, pour tout  $n > 7$ .

**3. Définitions et algorithmes récursifs (20 pts)**

Un *palindrome* sur un alphabet  $A$  est une chaîne de caractères qui se lit de la même manière de gauche à droite que de droite à gauche. Par exemple, les chaînes  $a$ ,  $aba$ ,  $abba$  et  $aaaa$  sont des palindromes sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$ , alors que  $abab$  et  $baa$  n'en sont pas.

- a) Donnez une définition récursive de l'ensemble des palindromes sur  $\{a, b\}$ .
- b) Donnez un algorithme récursif qui, étant donné un mot de longueur  $n$ , retourne vrai si ce mot est un palindrome et faux, sinon.

**4. Piles et Files (20 pts)**

Donnez des algorithmes en pseudo-code pour transférer les éléments d'une pile  $P_1$  à une pile  $P_2$ , de sorte que les éléments de  $P_2$  soient dans le même ordre que ceux de  $P_1$  en :

- a) Utilisant une pile additionnelle
- b) Utilisant seulement des variables additionnelles (le moins possible).

**5. Codage de Huffman(20 points)** Une petite Finlandaise veut coder le message suivant pour l'envoyer à son papa :

**isä älä myy myymälääsi**

Son père vient tout juste de lui montrer comment utiliser le codage de Huffman pour transformer les messages en une séquence de 0 et de 1 et elle veut lui montrer qu'elle a bien compris.

- a) Faire un tableau de la fréquence d'apparitions de chacune des lettres apparaissant dans le message. (fréquence=nombre d'occurrences de la lettre divisé par longueur du mot). Attention ! Ici l'espace entre les mots doit aussi être codé.
- b) Utiliser ce tableau pour construire, avec l'algorithme de Huffman, un arbre binaire donnant le meilleur codage et donner un tableau associant à chacune des lettres son code binaire. Calculez la longueur moyenne des codes associés aux lettres.
- c) Faire la même chose qu'en b) mais en utilisant cette fois le même pourcentage d'apparition pour chacune des lettres i.e le tableau de fréquences suivant :

ä	i	l	m	s	y	espace
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

- d) Est-ce que la longueur moyenne des codes obtenue en c) est plus petite que celle obtenue en b) ? Pourquoi ?
- e) Quel est le nombre de bits minimal nécessaire pour encoder le message, selon les fréquences calculées en a) puis selon celles en c) ?

**Pour les curieux :** isä älä myy myymälääsi veut dire "Papa, ne vends pas ton magasin". C'est aussi un palindrome!!

**6. Monceaux (10 points)** Supposons que vous ayez les éléments de clés [2, 18, 7, 5, 1, 6, 12] que vous voulez garder en mémoire dans un monceau.

- a) Insérez un à un les éléments, dans l'ordre donné, dans un monceau initialement vide. Supposez que la clé prioritaire est la plus petite clé. Dessinez le monceau avant et après chaque insertion.
- b) Dessinez l'arbre obtenu, si vous utilisez plutôt l'algorithme de bas en haut pour remplir le monceau. Obtenez-vous le même arbre ?