UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

REPRÉSENTATIONS BIGRADUÉES ET POLYNÔMES DE MACDONALD

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SYLVIE HAMEL

OCTOBRE 1997

REMERCIEMENTS

Pour commencer, un gros merci à mon directeur, François Bergeron, pour toutes ses idées, son soutien constant et, plus important encore, pour son incroyable talent à raconter les mathématiques. Merci à Anne Bergeron pour m'avoir donné le goût de la recherche dès le début de mon baccalauréat ainsi qu'à François Bergeron pour avoir accepté de travailler avec moi par la suite.

Je voudrais remercier aussi grandement le LACIM (LAboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique) ainsi que tous les professeurs qui en font partie pour l'opportunité qu'ils donnent aux étudiants du baccalauréat de s'initier à la recherche par des stages d'été.

Mille remerciements à Manon Blais, Manon Gauthier, Hélène Vallières, Gisèle Legault, Marie-Claude Côté et Jeanne Jobin pour leur bonne humeur et les nombreux services qu'elles m'ont rendus. Merci au LACIM et au CRSNG pour leur soutien financier tout au long de mes études.

Merci à Chan pour les macros des dessins de partages et la possibilité de mettre des nombres dans les petites cases!!! Merci à André pour ces nombreux conseils informatiques. Merci à ma coloc et grande amie Anne-Marie pour m'avoir endurée et encouragée dans cette période pas trop évidente (à bien des points de vue) de ma petite vie. Un gros merci à ma famille, toujours présente pour me soutenir, et à tous mes amis du LACIM: Benoit, Isou, Pilou, Balou, Steffie, Pat, Riccardo, Marie-Chantal, Éric ... Merci pour vos sourires, votre présence, votre appui...vous ensoleillez ma vie!

Je ne pourrais oublier de faire ici des remerciements particuliers à Steffie pour son très grand talent et sa grande patience qui ont mené à la réussite des très belles cases grises et noires dans les dessins de partages. Un autre merci particulier à Benoit pour sa lecture attentive des premiers chapitres de ce travail.

À toi bel amour, le plus grand des merci...pour ta présence, ton appui, tes sourires, ta tendresse...je t'aime...

Oups, j'allais oublier deux petits trésors: Ma nièce, Mariska et mon neveu, Marc-Antoine ... rien de mieux que le sourire de mes deux petits anges pour oublier tous mes soucis ☺.

Les dernières lignes de mes remerciements vont à une amie qui m'était très chère: Marilou, ta bonne humeur constante, ton énorme talent et ta joie de vivre donnaient aux gens autour de toi plus de chaleur qu'un rayon de soleil. C'est vraiment dommage que nos sourires à nous n'aient pas réussi à remplir le grand vide, la grande tritesse que tu gardais trop secrètement au fond de toi ... j'espère que là où tu es maintenant, tu es totalement heureuse ... une étoile au ciel ...

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS ii

LISTE DES FIGURES vi

LISTE DES SYMBOLES vii

RÉSUMÉ xi

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I
LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES 4

1.1 Partages 4

1.2 L'anneau des fonctions symétriques 11

1.2.1 L'anneau Λ_k 12

1.2.2 Quelques bases pour Λ^n 13

1.3 Polynômes de Schur 17

1.3.1 Approche combinatoire 17

1.3.2 Quotient de fonctions antisymétriques 22

1.3.3 Expression en terme des homogènes et des élémentaires 25

1.3.4 Caractères de représentations irréductibles 26

CHAPITRE II
LES POLYNÔMES DE MACDONALD 33

2.1 Les polynômes P_μ 33

2.2 Les polynômes H_μ 40

CHAPITRE III
LES ESPACES $\mathbf{M}_\mu(X)$ 45

CHAPITRE IV
LES ESPACES $\mathbf{M}_\mu(X, Y)$ 59

4.1 Définition des espaces 59

4.2 Intersections d'espaces 71

4.2.1 Caractère bigradué de $\mathbf{M}_A$ 77

4.2.2 Formules pour les composantes isotypiques de $\mathbf{M}_A$ 84

4.2.3 Construction d'éléments cycliques du sommet de $\mathbf{M}_A$ 94

CHAPITRE V
RECONSTRUCTION D'ESPACES À PARTIR DES INTERSECTIONS 108

5.1 Généralités 108

5.2 3 coins 112

5.3 Le cas $\mu = 321$ 117

CONCLUSION 122

APPENDICE A
PROCÉDURES MAPLE ET EXEMPLES D'UTILISATION 124

A.1 Fonctions sur les diagrammes 124

A.2 Fonctions symétriques 127

A.3 Espace de polynômes bivariés 128

A.4 Action diagonale du groupe symétrique 132

A.5 Calcul de caractères 134

A.6 Calcul de bases pour les espaces 136

A.7 Intersections d'espaces 137

A.8 Calcul des κ_γ 138

A.8.1 Polynômes de Kostka 138

A.8.2 Inverse Kostka 139

A.8.3 Nabla 140

A.8.4 Calcul des κ_γ via nabla 142

Bibliographie 143

LISTE DES FIGURES

1.1 Matrices des nombres de Kostka 21

2.1 Tables de fonctions de Kostka 43

3.1 Diagramme de Hasse des partages de 6 sous l'ordre de la dominance . . 56

4.1 Intersections et sommets associés 75

4.2 Tables de Φ_A pour $\mu \vdash n$, $n \leq 6$ 80

4.3 Table d'opérateurs différentiels 101

5.1 Décomposition de bases avec 3 coins 113

5.2 Décomposition d'espace et **flip** avec 3 coins 113

5.3 Entrées associées à chaque case du partage 753 117

5.4 Intersection des espaces $\mathbf{M}_{32}$, $\mathbf{M}_{221}$ et $\mathbf{M}_{311}$ 118

5.5 Trois **flip** 119

5.6 Dimension des différentes parties de l'intersections 119

5.7 Entrées associées à chaque case du partage 321 120

5.8 Dimension de chaque espace associée aux cases du partage 321 121

LISTE DES SYMBOLES

a_A	polynômes générateurs de $\mathbf{M}_A$	p.80
$a(c)$	bras d'une case c de λ (nombre de cases à droite de c)	p.6
$a'(c)$	co-bras d'une case c de λ (nombre de cases à gauche de c)	p.6
a_δ	déterminant dit de Vandermonde	p.23
$B_\mu(q,t)$	générateur des bi-exposants de μ	p.9
$\mathcal{B}$	éléments formant possiblement une base de $\mathbf{M}_\mu$	p.111
c	composition	p.17
$\mathcal{C}_\mu$	ensemble de fonctions symétriques élémentaires partielles	p.45
$c(T)$	charge d'un tableau semi-standard T	p.66
$\delta_{\lambda\mu}$	delta de Kronecker	p.21
$\Delta(X_A)$	déterminant de Vandermonde dans le sous-alphabet X_A	p.46
$\Delta_T(X)$	polynôme de Garnir associé à T	p.46
Δ_μ	déterminant de la matrice associée à μ	p.59
d_A	degré total maximal d'une intersection $\mathbf{M}_A$	p.75
$d_k(\mu)$	somme des k premières parts de μ'	p.45
$\deg X$	dimension d'une représentation $X : G \to Gl_d$	p.26
e_n	fonctions (polynômes) symétriques élémentaires	p.15
$e_r(S)$	$r^{\text{ième}}$ fonction symétrique élémentaire des variables dans S	p.45
$E(t)$	fonction génératrice des fonctions symétriques élémentaires	p.16

$\mathcal{F}(\mathcal{V})$	image de Frobenius d'une représentation $\mathcal{V}$ de $\mathcal{S}_n$	p.31
$\mathcal{F}(\mathbf{M}_\mu)$	caractéristique de Frobenius de $\mathbf{M}_\mu$	p.69
$\mathcal{F}(\mathbf{M}_A)$	caractéristique de Frobenius de $\mathbf{M}_A$	p.77
$\mathbf{flip}_\mu$	automorphisme de l'espace $\mathbf{M}_\mu$	p.108
G_μ	combinaisons linéaires de translatées d'éléments de Garnir standards de forme μ	p.47
GL_d	groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_d$	p.26
$GL(V)$	ensemble de toutes les tranformations linéaires inversibles de $V \to V$	p.27
h_n	fonctions (polynômes) symétriques homogènes complètes	p.14
$H(t)$	fonction génératrice des fonctions homogènes complètes	p.16
H_μ	polynômes symétriques de Macdonald	p.40
$\widetilde{H}_\mu$	renormalisation des polynômes H_μ	p.43
$h_i(T)$	hauteur d'un indice i dans un tableau T	p.53
I_μ	idéal généré par les éléments de $\mathcal{C}_\mu$	p.45
$\mathcal{I}_\mu$	Complément orthogonal de l'espace $\mathbf{M}_\mu(X,Y)$	p.110
$K_{\lambda\mu}$	nombres de Kostka	p.20
$K(n)$	matrice de nombres de Kostka $K_{\lambda\mu}$ où λ et μ sont des partages de n	p.20
$K_{\lambda\mu}(q,t)$	fonctions de Kostka	p.42
$\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t)$	renormalisation des fonctions de Kostka	p.44
$k(\mu)$	nombre de composantes positives d'un partage	p.45
κ_γ	polynômes symétriques introduit par Garsia-Tesler	p.83
λ,μ	partage	p.4
λ,μ	diagramme de Ferrers	p.5
λ_i	parts de λ	p.4

$\ell(\lambda)$	longueur de λ (nombre de parts)	p.4
$\ell(\sigma)$	nombre d'inversion d'une permutation	p.22
$\|\lambda\|$	poids de λ (somme des parts)	p.5
$\lambda \vdash n$	λ est un partage de n	p.5
$\lambda(\sigma)$	partage associé à la permutation σ	p.5
λ'	partage conjugué à λ	p.6
$\lambda(c)$	partage associé à une composition	p.17
$\lambda(c_T)$	contenu d'un tableau T	p.17
$l(c)$	jambe d'une case c de λ (nombre de cases au nord de c)	p.7
$l'(c)$	co-jambe d'une case c de λ (nombre de cases au sud de c)	p.7
Λ_n	anneau des polynômes symétriques	p.12
Λ	anneau des fonctions symétriques	p.12
$\mathcal{L}[P_1, \ldots, P_n]$	ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des polynômes P_i	p.60
$\mathcal{L}_\partial[P_1, \ldots, P_n]$	ensemble des combinaisons linéaires de toutes les dérivées partielles des polynômes P_i	p.61
m_λ	fonctions (polynômes) symétriques monomiales	p.13
$m_i(\lambda)$	nombre de parts de valeur i dans le partage λ	p.5
$\mu^{(i)}$	partage obtenu en enlevant le coin le plus bas qui apparaît dans la ligne i ou au-dessus de la ligne i	p.51
$\mathcal{M}_d$	ensemble des matrices $d \times d$ à entrée dans $\mathbb{C}$	p.26
$\mathbf{M}_\mu(X)$	complément orthogonal de I_μ	p.46
$\mathbf{M}_\mu(X,Y)$	espace des polynômes, en x_i, y_i, qui sont combinaisons linéaires, à coefficients rationnels, de dérivées partielles de Δ_μ	p.60
$\mathbf{M}_A$	intersection des $\mathbf{M}_\nu$, $\nu \in A \subset \pi(\mu)$	p.71

p_n	fonctions (polynômes) symétriques somme de puissances	p.15
P_μ	polynômes symétriques de Macdonald	p.36
$\Pi_{h,k}(P)$	composante bihomogène de bidegré (h,k) de P	p.68
$\pi(\mu)$	ensemble des prédécesseurs de μ	p.71
Φ_A	polynômes conjecturés égaux à la caractéristique de Frobenius de l'espace $\mathbf{M}_A$	p.77
Ψ_A	composante de degré maximal de Φ_A	p.80
$\rho(A)$	intersection des partages dans l'ensemble A	p.82
s_λ	fonctions (polynômes) symétriques de Schur	p.18
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	signe d'une permutation	p.22
$ST(\mu)$	ensemble de tableaux standards de forme μ	p.47
σ	permutation (éléments de $\mathcal{S}_n$)	p.11
$\mathcal{S}_n$	groupe symétrique sur $\{1,2,\ldots,n\}$	p.11
$\mathcal{T}_{\lambda\mu}$	ensemble des tableaux semi-standards de forme λ et de contenu μ	p.20
$w(T)$	mot associé à un tableau semi-standard T	p.66
w	involution qui envoie s_λ sur s'_λ	p.84
χ	caractère d'une représentation	p.30
$\chi^{\mathbf{M}_\mu}(q,t)$	caractère bigradué de $\mathbf{M}_\mu$	p.69
$\preceq$	ordre de dominance sur les partages	p.9
$\leq$	ordre lexicographique sur les partages	p.9
$f[-]$	λ-substitution de - dans la fonction symétrique f	p.34
$\lambda \wedge \mu$	l'infimum de μ et λ dans le poset des partages, avec l'ordre de la dominance	p.56
∇	opérateur définit sur les polynômes $\widetilde{H}_\mu$	p.84

RÉSUMÉ

L'étude des polynômes de Macdonald (Macdonald, 1995) est reliée, selon une conjecture de Garsia et Haiman (Garsia - Haiman, 1993), à l'étude de l'espace engendré par les dérivées partielles de déterminants à la Vandermonde associés à chaque partage d'un entier n.

Nous étudions des intersections de tels espaces et nous donnons de nouvelles conjectures donnant une description explicite de ces intersections en tant que représentations du groupe symétrique. Cette étude procède à la fois d'un point de vue théorique et via l'utilisation d'outils de calcul formel.

INTRODUCTION

Les polynômes symétriques, dits de Macdonald, (introduits par Macdonald vers la fin des années 80 (Macdonald, 1988)), interviennent dans plusieurs domaines des mathématiques. D'abord dans l'étude des fonctions symétriques, puisqu'ils généralisent à la fois les polynômes de Hall-Littlewood, les polynômes de Jack, les polynômes zonaux et les fonctions de Schur. Ensuite, en théorie des fonctions spéciales dans le contexte de généralisations de l'intégrale de Selberg (Kadell, 1992), ainsi qu'en physique théorique où ils apparaissent, comme fonctions propres d'opérateurs, dans l'étude de modèles quantiques d'intéractions de particules élémentaires. De plus, modulo une conjecture de Garsia et Haiman ils sont liés à l'étude de propriétés du schéma de Hilbert en géométrie algébrique (Haiman, 1997).

Pour dégager des propriétés de ces polynômes symétriques, Garsia et Haiman ont introduit des $\mathcal{S}_n$-modules bigradués, $\mathbf{M}_\mu(X,Y)$, de polynômes harmoniques dont le caractère bigradué semble coïncider avec les polynômes de Macdonald (Garsia - Haiman, 1993). Cependant, pour se convaincre formellement de cela, il reste à montrer, suite aux travaux de Garsia et Haiman, que la dimension de ces modules $\mathbf{M}_\mu$ est $n!$. Cette conjecture est maintenant connue sous le nom de *conjecture* $n!$. Dans ce travail, nous étudions et décrivons explicitement des intersections de ces modules $\mathbf{M}_\nu$, pour ν variant dans l'ensemble des prédécesseurs immédiats d'un partage μ donné.

La principale contribution de ce travail, l'étude des intersections de modules $\mathbf{M}_\nu$, est discutée, en détails, au chapitre 4 et est suivi, au chapitre 5, d'une application intéressante. Les premiers chapitres, quand à eux, présentent des rappels sur les fonctions symétriques, les polynômes de Macdonald, ainsi que des travaux connexes au présent mémoire.

Plus explicitement, le premier chapitre du travail présente un bref rappel sur les partages d'entiers, les bases usuelles de polynômes symétriques tels les polynômes de Schur et plusieurs résultats classiques s'y rattachant.

Le chapitre 2 donne une définition des polynômes symétriques de Macdonald, notés P_μ, ainsi qu'une renormalisation de ceux-ci en des polynômes H_μ.

Le troisième chapitre introduit les espaces $\mathbf{M}_\mu(X)$, étudiés par DeConcini et Procesi (DeConcini - Procesi, 1981), puis par N. Bergeron-Garsia (Bergeron N. - Garsia, 1992). Ces espaces sont des spécialisations des espaces qui sont l'objet d'étude principal de ce mémoire et c'est pourquoi nous les définissons ici et donnons quelques résultats importants s'y rattachant.

Le quatrième chapitre commence par une présentation d'espaces $\mathbf{M}_\mu(X,Y)$, où $\mu \vdash n$ et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, ainsi que de plusieurs démonstrations de propriétés les concernant. Ces espaces forment le principal objet d'étude de ce travail. Comme nous l'avons mentionné plus tôt, ces espaces ont été introduit par Garsia et Haiman pour fournir une famille de représentations bigraduées de $\mathcal{S}_n$ qui soit isomorphe à la représentation régulière et qui permet de montrer la conjecture de Macdonald (conjecture 2.2.1 du présent travail). Nous présentons ensuite le coeur de ce travail qui consiste à donner des bases explicites pour certaines intersections d'espaces $\mathbf{M}_\mu$. En fait, nous étudions en détails les espaces

$$\mathbf{M}_A := \bigcap_{\nu \in A} \mathbf{M}_\nu,$$

où $A \subseteq \pi(\mu)$ et où $\pi(\mu)$ est l'ensemble des prédécesseurs de μ, c'est-à-dire l'ensemble des partages obtenus de μ en lui enlevant un coin. Nous présentons ici les observations surprenantes que nous avons faites en partie à l'aide du logiciel MapleV, ainsi que les conjectures et les résultats auxquels ces observations nous ont mené.

Le dernier chapitre, quand à lui, reproduit une partie de l'article "Science Fiction and Macdonald's polynomials", de F. Bergeron et A. Garsia (Bergeron F. - Garsia, 1997), dans le but de souligner une application du présent travail. En fait, cette section montre comment le calcul d'intersections d'espaces permet de "reconstruire" les espaces $\mathbf{M}_\mu$ au complet. Le présent travail a été utilisé, de cette façon, par Bergeron-Garsia pour leurs travaux.

Le travail est suivi d'un appendice constitué des descriptions des procédures Maple qui ont été utilisées pour mieux comprendre et étudier les espaces $\mathbf{M}_A$.

CHAPITRE I

LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Dans ce présent chapitre, nous présentons quelques résultats classiques sur les fonctions symétriques (souvent sans preuve), des définitions ainsi que plusieurs notations qui nous seront utiles pour la compréhension de tout ce qui va suivre. On peut trouver les preuves manquantes dans plusieurs livres, par exemple dans celui de Macdonald (Macdonald, 1995), dont nous allons suivre les notations.

1.1 Partages

Cette section présente les notions de base pour les partages d'entiers ainsi que plusieurs définitions s'y rattachant.

Définition 1.1.1 Un *partage* est une suite finie $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ d'entiers positifs où les λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont en ordre décroissant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0.$$

On dit des λ_i que se sont les *parts* de λ.

Remarques: Voici quelques notations qui nous seront utiles tout au long du texte qui va suivre:

1. Le nombre de parts de λ est noté $\ell(\lambda)$ et est appelé la *longueur* du partage.

2. La somme des parts de $\lambda : \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ est notée $|\lambda|$ et est appelée le *poids* du partage. (Si $|\lambda| = n$ on dit que λ est un partage de n, noté $\lambda \vdash n$).

3. Il est quelquefois utile de connaître le nombre de fois qu'une certaine part apparaît dans un partage. On utilise alors la notation suivante:

$$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}),$$

   où m_i est le nombre de parts de valeur i. Le nombre

$$m_i = m_i(\lambda) = \mathrm{Card}\{j : \lambda_j = i\},$$

   est appelé la *multiciplicité* de i dans λ.

4. À une permutation σ, on associe un partage $\lambda(\sigma)$ de la façon suivante: si m_1 est le nombre de cycles de longueur 1, m_2 le nombre de cycles de longueur 2, ... et m_n le nombre de cycles de longueur n de σ alors

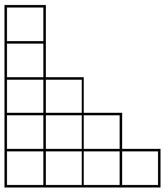
$$\begin{aligned} \lambda(\sigma) &= (\underbrace{n, \ldots, n}_{m_n \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{2, \ldots, 2}_{m_2 \text{ fois}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m_1 \text{ fois}}), \\ &= (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}). \end{aligned}$$

5. Pour simplifier la notation, on écrira, dans ce qui suit, les partages comme une suite de nombres. Par exemple, on écrira, $\lambda = 321$ au lieu de $\lambda = (3, 2, 1)$.

Définition 1.1.2 On associe à chaque partage un *diagramme de Ferrers*, c'est-à-dire l'ensemble des points (ou carrés), $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq i \leq \lambda_i - 1$, $0 \leq j \leq \ell(\lambda) - 1$, où i croît de gauche à droite et j, de bas en haut. On a donc un nombre fini de cases et il est bien de remarquer que pour $(i, j) \in \lambda$, si $i > 0$ alors $(i - 1, j) \in \lambda$ et si $j > 0$, $(i, j - 1) \in \lambda$.

Remarque: Lorsque le contexte le permet, on désigne aussi par λ le diagramme de Ferrers associé au partage λ.

Exemple 1.1.1 Le partage $\lambda = 43211$ est représenté par le diagramme de Ferrers suivant:

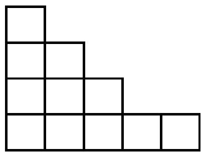

.

Définition 1.1.3 Le *conjugué* d'un partage λ, noté λ', est le partage dont le diagramme est le transposé du diagramme associé à λ, c'est-à-dire qu'on a $(i,j) \in \lambda'$ si et seulement si $(j,i) \in \lambda$. On a donc que λ'_i est le nombre de cases dans la i-ième colonne de λ:

$$\lambda'_i = \mathrm{Card}\{j : \lambda_j \geq i\}.$$

(En particulier, on a $\lambda'_1 = \ell(\lambda)$, $\lambda_1 = \ell(\lambda')$ et $\lambda'' = \lambda$).

Exemple 1.1.2 Le partage conjugué de $\lambda = 43211$ est le partage $\lambda' = 5321$ représenté par le diagramme de Ferrers suivant:


.

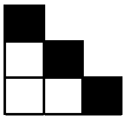
Définition 1.1.4 Voici quelques définitions, associées au diagramme de Ferrers λ d'un partage λ:

1. Lorsqu'une case c de λ est telle que le diagramme $\lambda \setminus c$ (le diagramme obtenu en enlevant la case c au diagramme λ), est aussi un diagramme de Ferrers associé à un partage, on dit que c est un *coin* du partage λ. En fait, on a un coin, $(\lambda_i - 1, i-1)$, toutes les fois que $\lambda_i > \lambda_{i+1}$.

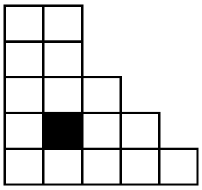
2. Le nombre de cases de λ à droite d'une case c est appelé le *bras* de c et est noté $a(c)$ tandis que le nombre de cases à sa gauche est appelé *co-bras* de c et est noté $a'(c)$.

3. Le nombre de cases de λ au-dessus d'une case c est appelé la *jambe* de c et est noté $l(c)$ tandis que le nombre de cases au-dessous de c est appelé *co-jambe* de c et est noté $l'(c)$.

Exemple 1.1.3 Le partage $\lambda = 321$ a trois coins. Ce sont les cases noires du diagramme qui suit:


.

Exemple 1.1.4 Les paramètres bras, co-bras, jambe, co-jambe, correspondants à la case c, (en noir), du partage:

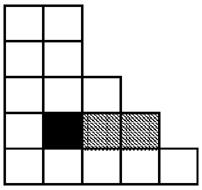

,

sont respectivement:

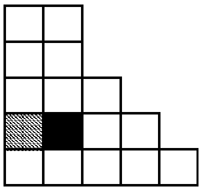
$$a(c) = 2, \ a'(c) = 1, \ l(c) = 3 \ et \ l'(c) = 1.$$

Ces valeurs peuvent être visualisées de la façon suivante:

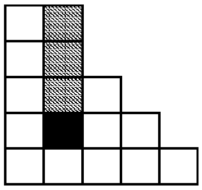
$a(c)$:


;

$a'(c)$:

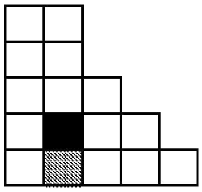

;

$l(c)$:



;

$l'(c)$:



.

Définition 1.1.5 Pour chaque partage λ, on définit

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i (i-1) = \sum_{c \in \lambda} l'(c).$$

Autrement dit, c'est la somme obtenue si on introduit des 0 dans la première ligne du diagramme de Ferrers associé à λ, des 1 dans la seconde ligne et ainsi de suite. De même, pour le partage conjugué, on a

$$n(\lambda') = \sum_{c \in \lambda'} l'(c) = \sum_{c \in \lambda} a'(c).$$

Exemple 1.1.5 Pour le partage $\lambda = 43211$, on a

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-1} 4 \\
\cline{1-1} 3 \\
\cline{1-2} 2 & 2 \\
\cline{1-3} 1 & 1 & 1 \\
\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} ;$$

Donc ici, $n(\lambda) = 0+0+0+0+1+1+1+2+2+3+4 = 14$.

Définition 1.1.6 Les paramètres introduits plus haut nous permettent de définir les deux concepts suivants:

1. $T_\mu = T_\mu(q,t) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)}$,

2. $B_\mu = B_\mu(q,t) = \sum_{c\in\mu} q^{a'(c)} t^{l'(c)}$.

(B_μ est appelé le *générateur des bi-exposants* de μ).

Définition 1.1.7 On définit un ordre partiel, appelé ordre de la *dominance*, sur les partages de n de la manière suivante: si $\lambda \vdash n$ et $\mu \vdash n$ alors, on a que $\lambda \preceq \mu$ si

$$\lambda_1 \leq \mu_1,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + \mu_2,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k,$$

où $k = \max\{\ell(\lambda), \ell(\mu)\}$. Dans le cas où, par exemple, $\ell(\lambda) > \ell(\mu)$, on complète les parts de μ par des parts nulles.

Exemple 1.1.6 Si $\lambda = 321$ et $\mu = 42$ alors $\lambda \prec \mu$ car

$$3 \leq 4,$$

$$3 + 2 \leq 4 + 2,$$

et

$$3 + 2 + 1 \leq 4 + 2 + 0.$$

Exemple 1.1.7 Si $\lambda = 3111$ et $\mu = 222$ alors λ et μ sont incomparables car on a

$$2 \leq 3,$$

$$2 + 2 \leq 3 + 1,$$

mais

$$2 + 2 + 2 \geq 3 + 1 + 1.$$

Définition 1.1.8 On définit l'ordre *lexicographique* sur les partages: $\lambda > \mu$ si la première différence non-nulle, $\lambda_i - \mu_i$, est positive.

Lemme 1.1.1 *L'ordre lexicographique, sur l'ensemble des partages de l'entier n, étend l'ordre de la dominance en un ordre total.* ☺

Exemple 1.1.8 Pour $n = 4$ on a

$$4 > 31 > 22 > 211 > 1111.$$

Définition 1.1.9 Soit $\lambda \vdash n$. Un *tableau* de *forme* λ est une fonction qui associe à chaque case du diagramme de Ferrers, associé à λ, un entier positif. Un tableau *injectif* est un tableau pour lequel cette fonction est injective. On considère souvent le cas où les valeurs de cette fonction sont $1, 2, \ldots, n$. On représente un tel tableau, en plaçant les valeurs associées aux cases à l'intérieur de celles-ci.

Exemple 1.1.9 Tableau injectif:

$$\begin{array}{|c|cc}\cline{1-1} 5 & & \\ \cline{1-2} 3 & \multicolumn{1}{c|}{4} & \\ \hline 6 & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}\ .$$

Définition 1.1.10 Soit $\lambda \vdash n$. Un tableau *standard* T est un tableau injectif (contenant les entiers $1, 2, \ldots, n$), de sorte que les nombres soient placés de façon strictement croissante de gauche à droite, dans les lignes, et de bas en haut, dans les colonnes.

Définition 1.1.11 Soit $\lambda \vdash n$. Un tableau *semi-standard* est un tableau dans lequel les nombres sont placés de façon croissante de gauche à droite, dans les lignes, et strictement croissante de bas en haut, dans les colonnes. (Ici, on peut donc répéter un nombre plus d'une fois).

Exemple 1.1.10 Voici un exemple, associé au partage $\lambda = 321$, pour chacun des tableaux définis:

1. Tableau standard:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-1} 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}\ ;$$

2. Tableau semi-standard:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-1} 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}\ .$$

1.2 L'anneau des fonctions symétriques

Dans cette section, nous définissons plusieurs familles de polynômes (fonctions) symétriques et remarquons qu'ils acquièrent une structure d'anneau. Pour simplifier la notation, on pose $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $P(X) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Définition 1.2.1 Pour σ dans $\mathcal{S}_n$, posons $\sigma X = x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Soit $P(X)$ un polynôme à n variables. On définit l'*action* du groupe symétrique sur ce polynôme de la façon suivante:

$$\sigma P(X) = P(\sigma X),$$

pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Définition 1.2.2 Un polynôme *symétrique* est un polynôme P tel que

$$P(X) = \sigma P(X),$$

$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$.

(Un polynôme est donc symétrique s'il est invariant sous l'action du groupe symétrique.)

Exemple 1.2.1 Sous l'action de $\mathcal{S}_3$,

1. Le polynôme $P = x_1 + x_2 + x_3$ est symétrique,
2. Le polynôme $Q = x_1 + x_2^2 + x_3$ n'est pas symétrique.

Définition 1.2.3 Un polynôme est dit *homogène* de degré n si chacun des monômes qui le compose est de degré total n.

Exemple 1.2.2

1. Le polynôme $x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$ est homogène de degré 3,
2. Le polynôme $x_1x_2 + x_1^2 + x_1x_3$ est homogène de degré 2,
3. Le polynôme $x_1 + x_2^2 + x_3$ n'est pas homogène.

1.2.1 L'anneau Λ_k

Les polynômes symétriques, en k variables indépendantes, forment un anneau Λ_k. C'est un anneau gradué par le degré et on a

$$\Lambda_k = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda_k^n\,,$$

où Λ_k^n est l'espace vectoriel des polynômes symétriques homogènes de degré n.

Définition 1.2.4 Λ_k est appelé l'*anneau des polynômes symétriques.*

Définition 1.2.5 Si on se permet de considérer un nombre infini de variables (pour formaliser ce passage, il faut procéder à une limite inductive dans la catégorie des anneaux gradués. Voir (Macdonald, 1995)), alors on est en présence de *fonctions symétriques* et on note Λ, l'anneau gradué des fonctions symétriques. On a que

$$\Lambda = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n.$$

Remarque: Dans ce qui suit, on aura tendance à confondre fonctions et polynômes symétriques, étant donné que la seule différence entre eux réside en leur nombre de variables.

1.2.2 Quelques bases pour Λ^n

Définition 1.2.6 Considérons $\lambda \vdash k$, $k \leq n$. On définit

$$m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_\alpha x^\alpha,$$

où les α sont les permutations distinctes des entrées $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-k \text{ fois}})$ et où $x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$. Ce polynôme est clairement symétrique et est appelé polynôme symétrique *monomial*. Pour le partage vide noté 0, on pose $m_0 = 1$.

Proposition 1.2.1 *Les polynômes $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ forment une base de l'espace Λ^n. Cet espace est donc de dimension égale au nombre de partages de n. (Si k est le nombre de variables considérées et $k < \ell(\lambda)$, alors $m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$. La dimension est alors donnée par les partages de n qui possèdent au plus k parts.)*

Démonstration:

Par récurrence sur le degré: Si le degré est 0 ou 1 alors le résultat est immédiat. Sinon, supposons que tous les polynômes de degré strictement inférieur à n s'écrivent comme combinaison linéaire de monomiales. Soit P un polynôme symétrique de degré n. On peut disposer les monômes de P selon l'ordre lexicographique décroissant de leurs exposants, en commençant par ceux de degré n. On aura:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_\lambda \underbrace{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}}_{\text{terme dominant}} + \text{autres termes},$$

où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. (À cause de l'ordre lexicographique).
Posons $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Puisque P est un polynôme symétrique, alors s'il contient le monôme $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ alors il doit nécessairement contenir tous les monômes présents dans m_λ.
Donc,

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_\lambda m_\lambda + \text{ autres termes},$$

et

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a_\lambda m_\lambda = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré $\leq n$. Si le degré de Q est strictement plus petit que n, l'hypothèse de récurrence nous permet de conclure que la preuve est terminée. Sinon, on recommence le même procédé. On aura alors, après au plus $p(n)$ étapes, que le polynôme obtenu sera de degré inférieur à n. ($p(n)$ est une notation pour le nombre de partages d'un entier n.) En d'autres mots, on a:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda m_\lambda = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

où certains a_λ peuvent être nuls et où le degré de $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) < n$. On a donc, par récurrence, que P est combinaison linéaire de monomiales. Il nous reste à voir maintenant que la dimension de cette base est égale au nombre de partages de n, c'est-à-dire que les m_λ sont indépendants pour les $\lambda \vdash n$. Mais, pour cela, on considère seulement les termes dominants des m_λ, les autres termes de la monomiale étant obtenus par permutations des exposants de ce terme. Alors, on se rend compte que pour les monomiales associées à deux partages différents, les termes dominants sont des monômes différents et on sait que tous les monômes sont linéairement indépendants.

☺

Exemple 1.2.3 Voici quelques exemples de polynômes monomiaux:

1. $m_3(x_1, x_2) = m_{\square\square\square}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$,
2. $m_{21}(x_1, x_2) = m_{\substack{\square\\\square\square}}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$,
3. $m_{111}(x_1, x_2) = m_{\substack{\square\\\square\\\square}}(x_1, x_2) = 0$,
4. $m_{111}(x_1, x_2, x_3) = m_{\substack{\square\\\square\\\square}}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$,
5. $m_{111}(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_{\substack{\square\\\square\\\square}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$.

Définition 1.2.7 Le polynôme symétrique *homogène complet* de degré n est le polynôme

$$h_n(x_1,\ldots,x_k) := \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}.$$

C'est donc la somme de tous les polynômes monomials m_λ, avec $\lambda\vdash n$, en les variables $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

Exemple 1.2.4

1. $h_2(x_1,x_2) = m_{\square\square}(x_1,x_2) + m_{\substack{\square\\\square}}(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2) + (x_1x_2)$,
2. $h_2(x_1,x_2,x_3) = m_{\square\square}(x_1,x_2,x_3) + m_{\substack{\square\\\square}}(x_1,x_2,x_3)$
   $= (x_1^2+x_2^2+x_3^2) + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$,
3. $h_3(x_1,x_2) = m_{\square\square\square}(x_1,x_2) + m_{\substack{\square\square\\\square}}(x_1,x_2) + m_{\substack{\square\\\square\\\square}}(x_1,x_2) = (x_1^3+x_2^3) + (x_1x_2^2+x_2x_1^2)$,
4. $h_3(x_1,x_2,x_3) = m_{\square\square\square}(x_1,x_2,x_3) + m_{\substack{\square\square\\\square}}(x_1,x_2,x_3) + m_{\substack{\square\\\square\\\square}}(x_1,x_2,x_3)$
   $= (x_1^3+x_2^3+x_3^3)+(x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2x_1^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2+x_3x_2^2)+(x_1x_2x_3)$.

Définition 1.2.8 Le polynôme symétrique *somme de puissances* de degré n est le polynôme

$$p_n(x_1,\ldots,x_k) = m_{(n)}(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{i\geq 1} x_i^n,$$

où $m_{(n)}$ est le polynôme symétrique monomial pour le partage $\lambda = \overbrace{\square\square\cdots\square}^{n}$.

Exemple 1.2.5

1. $p_2(x_1,x_2) = m_{\square\square}(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2$,
2. $p_2(x_1,x_2,x_3) = m_{\square\square}(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$,
3. $p_3(x_1,x_2) = m_{\square\square\square}(x_1,x_2) = x_1^3+x_2^3$,
4. $p_3(x_1,x_2,x_3) = m_{\square\square\square}(x_1,x_2,x_3) = x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

Définition 1.2.9 Le polynôme symétrique *élémentaire* de degré n est le polynôme

$$e_n(x_1,\ldots,x_k) = m_{(1^n)}(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{i_1<\cdots<i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}.$$

Exemple 1.2.6

1. $e_1(x_1, x_2, x_3) = m_{\square}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$,
2. $e_2(x_1, x_2, x_3) = m_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
3. $e_3(x_1, x_2, x_3) = m_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$,
4. $e_4(x_1, x_2, x_3) = m_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Théorème 1.2.1 *Si on considère un nombre infini de variables, les ensembles suivants sont des bases de Λ^n:*

1. $\{p_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$,

2. $\{h_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$,

3. $\{e_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$,

où, pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, *on définit* $p_\lambda = p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_k}$, $h_\lambda = h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_k}$ *et* $e_\lambda = e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_k}$. ☺

Proposition 1.2.2 *On a les fonctions génératrices suivantes:*

1. $E(t) = \sum_{n\geq 0} e_n t^n = \prod_{i\geq 1}(1 + x_i t)$,

2. $H(t) = \sum_{n\geq 0} h_n t^n = \prod_{i\geq 1}\left(\frac{1}{1 - x_i t}\right)$. ☺

Proposition 1.2.3

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \exp\left(\sum_{k\geq 1} p_k \frac{t^k}{k}\right).$$

<u>Démonstration:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} h_n t^n &= \prod_{i\geq 1}\left(\frac{1}{1 - x_i t}\right) = \exp\left(\sum_{i\geq 1}\ln\left(\frac{1}{1 - x_i t}\right)\right), \\
&= \exp\left(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{{x_i}^k t^k}{k}\right) = \exp\left(\sum_{k\geq 1}(\sum_{i\geq 1}{x_i}^k)\frac{t^k}{k}\right), \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1} p_k \frac{t^k}{k}\right).
\end{aligned}$$

Rappel : $\ln\left(\dfrac{1}{1-x_it}\right) = \sum_{k\geq 1} \dfrac{{x_i}^k t^k}{k}$ ☺

1.3 Polynômes de Schur

Les polynômes de Schur jouent un rôle très important dans ce qui va suivre. Nous en donnons ici diverses définitions ainsi que certaines propriétés les concernant.

1.3.1 Approche combinatoire

Définition 1.3.1 Une *composition* c d'un entier n est une suite d'entiers positifs

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_k),$$

telle que $\sum_i c_i = n$.

Définition 1.3.2 Considérons la composition $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$, alors on définit:

$$X^c := x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_k^{c_k}.$$

Définition 1.3.3 Soit c une composition. Le *partage associé à la composition* c, noté λ(c), est le partage obtenu en ordonnant les parts de la composition de façon décroissante.

Définition 1.3.4 Soit T un tableau associé à un partage λ. Le *contenu* du tableau est la composition $c_T = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ où c_i est égal au nombre de i dans T. Il est cependant plus habituel de parler du contenu du tableau en terme de partage, c'est-à-dire $\lambda(c_T)$.

Exemple 1.3.1 Soit le tableau T suivant:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-2} 1 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}\,.$$

Le contenu de T est le partage $\mu = 311$ associé à la composition $c = (3, 1, 0, 1)$.

Définition 1.3.5 Considérons un tableau T de forme λ. Alors, on définit:

$$X^T := \prod_{(i,j)\in\lambda} x_{T_{i,j}} \, ,$$

où $T_{i,j}$ est l'entrée en position (i, j) dans le tableau T.

Exemple 1.3.2 Pour le tableau T suivant:

$$\begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} 1 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}\;,$$

on a

$$X^T = x_1^2 x_3 x_4^2.$$

Définition 1.3.6 Étant donné un partage λ, le polynôme symétrique de *Schur* associé à λ peut être défini comme suit:

$$s_\lambda(X) := \sum_T X^T,$$

où T varie dans l'ensemble des tableaux semi-standards de forme λ dont les entrées sont dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ si $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Il n'est pas évident pour l'instant que ce polynôme soit symétrique).

Exemple 1.3.3 Voici quelques exemples de polynômes de Schur:

1. Posons $\lambda = 21$ et $X = x_1, x_2, x_3$. Alors les tableaux semi-standards possibles sont:

$$\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

   on a donc:

$$\begin{aligned} s_{21}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 \\ &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + 2x_1x_2x_3 \\ &= m_{21}(x_1, x_2, x_3) + 2m_{111}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

2. Posons $\lambda = 211$ et $X = x_1, x_2, x_3$. Alors les tableaux semi-standards possibles sont:

$$\begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array}$$

et donc:

$$\begin{aligned} s_{211}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2 \\ &= m_{211}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

3. Considérons maintenant le même partage, $\lambda = 211$, mais avec une variable de plus, c'est-à-dire, $X = x_1, x_2, x_3, x_4$. Alors les tableaux semi-standards possibles sont:

$$\begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 4 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}$$

et donc:

$$\begin{aligned} s_{211}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_1 x_4 \\ &\quad + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_3^2 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_3^2 x_1 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &\quad + x_4^2 x_1 x_2 + x_4^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_3 x_4 + x_2 x_3^2 x_4 + x_2 x_3 x_4^2 \\ &= x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_1 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 \\ &\quad + x_3^2 x_1 x_2 + x_3^2 x_1 x_4 + x_3^2 x_2 x_4 + x_4^2 x_1 x_2 + x_4^2 x_1 x_3 \\ &\quad + x_4^2 x_2 x_3 + 3 x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= m_{211}(x_1, x_2, x_3, x_4) + 3 m_{1111}(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

On remarque que pour un nombre de variables assez grand, l'expression des fonctions de Schur comme fonction des monomiales se stabilise. En effet, bien que pour trois variables, on ait $s_{211}(x_1, x_2, x_3) = m_{211}(x_1, x_2, x_3)$, et que pour quatre variables, on ait

$s_{211}(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_{211}(x_1, x_2, x_3, x_4) + 3m_{1111}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, pour $n \geq 4$, on a toujours $s_{211}(x_1, \cdots, x_n) = m_{211}(x_1, \cdots, x_n) + 3m_{1111}(x_1, \cdots, x_n)$ et on écrira simplement $s_{211} = m_{211} + 3m_{1111}$. Ceci reste vrai pour $n \leq 3$ puisqu'alors, $m_{1111}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Remarques:

1. $s_{(n)}(X) = h_n(X)$, où (n) est le partage $\lambda = \overbrace{\square\square\cdots\square}^{n}$.
2. $s_{(1^n)}(X) = e_n(X)$.

Définition 1.3.7 Définissons l'ensemble $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ comme suit:

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \{T \mid T \text{ est un tableau semi-standard de forme } \lambda \text{ et de contenu } \mu\},$$

où λ et μ sont des partages d'un même entier n.

Exemple 1.3.4 Le tableau suivant est un élément de $\mathcal{T}_{3211\ 2221} = \mathcal{T}_{\yng(1,1,2,3)\ \yng(1,2,2,2)}$;

$$\young(4,3,23,112)\ .$$

Définition 1.3.8 Les *nombres de Kostka*, noté $K_{\lambda\mu}$, comptent les tableaux semi-standards de forme λ et de contenu μ, c'est-à-dire,

$$K_{\lambda\mu} = |\,\mathcal{T}_{\lambda\mu}\,|\ .$$

On écrit, $K(n)$, pour la matrice des nombres de Kostka $(K_{\lambda\mu})$, où $\lambda, \mu \vdash n$ et où les colonnes sont indexées par la forme λ et les lignes par le contenu μ. Les λ, (respectivement les μ) sont placés de gauche à droite, (respectivement de haut en bas) selon l'ordre lexicographique. Il découle de la définition des tableaux semi-standards que ces matrices sont triangulaires inférieures.

Exemple 1.3.5 Pour $1 \leq n \leq 5$, on a les matrices $K(n)$ suivantes:

1. $K(1) = (1)$,

2. $K(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $K(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

4. $K(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

5. $K(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Figure 1.1: Matrices des nombres de Kostka

Définition 1.3.9 Comme les $\{p_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ forment une base de Λ^n on peut formellement introduire un produit scalaire en posant:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle := z_\lambda \delta_{\lambda\mu}.$$

où $\delta_{\lambda\mu}$ est le delta de Kronecker (i.e $\delta_{\lambda\mu}$=1 si $\lambda = \mu$ et 0 sinon), et pour μ de la forme $(1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n})$, $z_\mu = 1^{m_1} m_1!\, 2^{m_2} m_2! \, \cdots \, n^{m_n} m_n!$.

Proposition 1.3.1 *Pour ce produit scalaire, on a;*

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu,$$

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

☺

Remarque: On peut donc construire les s_λ en orthonormalisant (via Gram-Schmidt) les m_λ selon tout ordre qui étend le préordre de la dominance. Il suffit, par exemple, de prendre l'ordre lexicocraphique.

Exemple 1.3.6 Quelques exemples:

1. $s_1 = m_1$,
2. $s_2 = m_2 + m_{11}$,
3. $s_{11} = m_{11}$,
4. $s_3 = m_3 + m_{21} + m_{111}$,
5. $s_{21} = m_{21} + 2m_{111}$,
6. $s_{111} = m_{111}$.

1.3.2 Quotient de fonctions antisymétriques

Définition 1.3.10 Le *signe* d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, noté $\mathrm{sgn}(\sigma)$, est :

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{\ell(\sigma)},$$

où $\ell(\sigma)$ est le nombre d'inversion (c'est-à-dire le nombre de couples (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma_i > \sigma_j$) dans la permutation σ.

Définition 1.3.11 On dit qu'un polynôme P en $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est *antisymétrique* s'il satisfait la relation suivante:

$$\sigma P(X) = \mathrm{sgn}(\sigma) P(X),$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Définition 1.3.12 Pour une composition $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, on pose

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(X^\alpha),$$

où $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Remarque: Le polynôme a_α est antisymétrique. On a donc,

$$\sigma(a_\alpha) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_\alpha,$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Maintenant, supposons que $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geq 0$. Alors, on peut écrire

$$\alpha = \lambda + \delta\,,$$

où λ est un partage de longueur $\ell(\lambda) \leq n$ et $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$.

On peut alors écrire a_α comme suit:

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(X^{\lambda+\delta}),$$

qui s'exprime comme déterminant de la façon suivante:

$$a_{\lambda+\delta} = \mathrm{dét}(x_i^{\lambda_i+n-j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Définition 1.3.13 On définit a_δ, le déterminant dit de Vandermonde, de la manière suivante:

$$a_\delta := \mathrm{dét}(x_i^{n-j}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Lemme 1.3.1 *Tout polynôme antisymétrique, P, est divisible par a_δ, et P/a_δ est un polynôme symétrique.*

<u>Démonstration:</u>

Soit P un polynôme antisymétrique, c'est donc dire que

$$\sigma P(X) = \mathrm{sgn}(\sigma) P(X).$$

On considère le cas spécial $\sigma = (ij)$, (ij) échange les éléments i et j, et alors on obtient

$$P(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

Posant $x_i = x_j$, on remarque que l'égalité ne peut être satisfaite que si $P(X) = 0$. Ceci implique que $x_i - x_j$ divise $P(X)$ pour tout i et j tel que $1 \leq i, j \leq n$. D'où, a_δ divise $P(X)$. Voyons maintenant que P/a_δ est symétrique. Il faut donc voir que

$$\frac{P}{a_\delta}(X) = \sigma\left(\frac{P}{a_\delta}\right)(X).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\frac{P}{a_\delta}\right)(X) &= \frac{\sigma P}{\sigma a_\delta}(X), \\
&= \frac{\mathrm{sgn}(\sigma) P}{\mathrm{sgn}(\sigma) a_\delta}(X), \\
&= \frac{P}{a_\delta}(X).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité venant du fait que P et a_δ sont des polynômes antisymétriques. ☺

Remarque: Donc, $a_{\lambda+\delta}$ est divisible par a_δ et $a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ est un polynôme symétrique.

Proposition 1.3.2 *Soit le partage λ tel que $\ell(\lambda) \leq n$. Alors,*

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta},$$

où les polynômes sont en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Il est clair maintenant que les polynômes de Schur sont symétriques.) ☺

1.3.3 Expression en terme des homogènes et des élémentaires

Théorème 1.3.1 ***Déterminants de Jacobi-Trudi***

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*. On a*

$$s_\lambda = \text{dét}(h_{\lambda_i - i + j})$$

et

$$s_{\lambda'} = \text{dét}(e_{\lambda_i - i + j}),$$

où $1 \leq i, j \leq n$ *et* $e_k = h_k = 0$ *pour* $k < 0$. ☺

Exemple 1.3.7 Considérons le partage $\lambda = 32211$. Alors,

$$s_{32211} = s_{\ydiagram{1,1,2,2,3}} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_{-3} & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 \end{pmatrix} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ 1 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_1 \end{pmatrix}$$

et on a donc,

$$\begin{aligned} s_{\ydiagram{1,1,2,2,3}} &= h_{32211} - h_{3222} - h_{33111} + 3h_{4311} - h_{531} - h_{42111} + h_{4221} - 2h_{441} + h_{51111} \\ &\quad -2h_{5211} - h_{6111} + h_{711} + h_{54} + h_{522} + h_{621} - h_{72}. \end{aligned}$$

Exemple 1.3.8 Considérons encore une fois le partage $\lambda = 32211$. Alors,

$$s_{32211} = s_{\ydiagram{1,1,2,2,3}} = \text{dét}\begin{pmatrix} e_5 & e_6 & e_7 \\ e_2 & e_3 & e_4 \\ e_{-1} & e_0 & e_1 \end{pmatrix} = \text{dét}\begin{pmatrix} e_5 & e_6 & e_7 \\ e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 1 & e_1 \end{pmatrix}$$

et on a:

$$\begin{aligned} s_{\ydiagram{1,1,2,2,3}} &= -e_5e_4 + e_2e_7 + e_1(e_5e_3 - e_2e_4), \\ &= -e_{54} + e_{72} + e_{531} - e_{421}. \end{aligned}$$

Exemple 1.3.9 Pour λ partages de 1,2 et 3, on a:

1. $s_1 = e_1 = h_1$,
2. $s_2 = {e_1}^2 - e_2 = h_2$,
3. $s_{11} = e_2 = {h_1}^2 - h_2$,
4. $s_3 = {e_1}^3 - 2e_2e_1 + e_3 = h_3$,
5. $s_{21} = e_2e_1 - e_3 = h_2h_1 - h_3$,
6. $s_{111} = e_3 = {h_1}^3 - 2h_2h_1 + h_3$.

1.3.4 Caractères de représentations irréductibles

Dans cette section, nous notons par $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des matrices $d \times d$ à entrée dans $\mathbb{C}$ et par GL_d le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_d$. Cette section résume une partie du premier chapitre du livre (Sagan, 1991).

Définition 1.3.14 Une *représentation matricielle* d'un groupe G est un homomorphisme de groupe

$$X : G \longrightarrow GL_d.$$

Donc à chaque $g \in G$ on associe une matrice $X(g)$ telle que

1. $X(1) = I$ (la matrice identité), et
2. $X(gh) = X(g)X(h), \quad$ pour tout $g, h \in G$.

Le paramètre d est appelé le *degré* ou la dimension de la représentation et est dénoté deg X.

Exemple 1.3.10 Voici quelques exemples de représentations de $\mathcal{S}_n$:

1. La *représentation triviale* qui envoie chaque élément $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sur la matrice identité 1×1, c'est-à-dire la matrice (1). On note souvent la représentation triviale par $1_{\mathcal{S}_n}$ ou tout simplement par 1.

2. Il existe aussi une représentation non triviale de degré 1. C'est la *représentation alternée* qui à $\sigma \in \mathcal{S}_n$ associe $X(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

3. Une autre représentation importante de $\mathcal{S}_n$, est celle qui a $\sigma \in \mathcal{S}_n$ associe $X(\sigma) = (x_{i,j})_{n\times n}$ où,
$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Cette représentation de degré n est appelée *représentation par permutations.* Les matrices $X(\sigma)$ sont les *matrices de permutations* usuelles. Pour $\mathcal{S}_3$, on a:

$$X(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X(\,(1,2)\,) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X(\,(1,3)\,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(\,(2,3)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X(\,(1,2,3)\,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(\,(1,3,2)\,) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une approche plus synthétique aux représentations consiste à remplacer les “matrices” par des “transformations linéaires”, ainsi, on obtient ce qui suit.

Remarque: Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On note $GL(V)$, l'ensemble de toutes les transformations linéaires inversibles de V dans V. (Si $\dim V = d$, $GL(V)$ et GL_d sont isomorphes, comme groupes.)

Définition 1.3.15 Soit V un espace vectoriel complexe et G un groupe. Alors, V est un G-module s'il existe un homomorphisme de groupes φ:

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V).$$

On dit que φ est une *représentation linéaire* de G. De manière équivalente, V est un G-module s'il existe une action, $g \cdot v$, de G sur V, c'est-à-dire que

1. $g \cdot v \in V$, pour tout $g \in G$, $v \in V$,
2. $g(cv + dw) = c(g \cdot v) + d(g \cdot w)$, pour tout $g \in G$, $v \in V$ et $c, d \in \mathbb{C}$,
3. $(g \cdot h)v = g \cdot (h \cdot v)$, pour tout $g, h \in G$, $v \in V$,
4. $1 \cdot v = v$.

Si on choisit une base ordonnée de V, on peut associer à chaque représentation linéaire, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, une représentation matricielle, $X : G \longrightarrow GL_d$, en posant $X(g) =$ matrice de $\varphi(g)$ dans cette base.

Définition 1.3.16 On dit que G *agit* sur un ensemble S, si les conditions 1, 3 et 4 sont satisfaites.

Définition 1.3.17 Si un groupe G agit sur un ensemble $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, alors le module associé $\mathbb{C}[S]$:

$$\mathbb{C}[S] := \{c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_n s_n \mid c_i \in \mathbb{C}, \forall i\},$$

est appelé *représentation par permutations* associée à S. Les éléments de S forment une base de $\mathbb{C}[S]$ appelée *base standard.*

Une des représentation les plus importantes pour les groupes est la représentation dite *régulière*:

Définition 1.3.18 Soit G un groupe. G agit sur lui-même par multiplication à gauche: si $g \in G$ et $h \in S = G$, alors l'action à gauche de g sur h, $g \cdot h$, est définie comme le produit usuel dans le groupe. Les propriétés 1, 3 et 4 sont vérifiées par les axiomes de fermeture, d'associativité et d'identité du groupe respectivement. Alors, si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, le G-module correspondant $\mathbb{C}[G]$ est:

$$\mathbb{C}[G] = \{c_1g_1 + c_2g_2 + \cdots + c_ng_n \mid c_i \in \mathbb{C}, \forall i\},$$

qu'on appelle l'*algèbre de groupe* de G. On a donc l'action suivante:

$$g \cdot (c_1g_1 + c_2g_2 + \cdots + c_ng_n) = c_1(g \cdot g_1) + c_2(g \cdot g_2) + \cdots + c_n(g \cdot g_n),$$

pour tout $g \in G$.

Exemple 1.3.11 Considérons le cas du groupe cyclique $C_4 = \langle g \rangle$, avec $g^4 = 1$, et trouvons sa représentation régulière.
Premièrement, on a

$$\mathbb{C}[C_4] = \{c_1 1 + c_2 g + c_3 g^2 + c_4 g^3 \mid c_i \in \mathbb{C},\ \forall i\}.$$

On peut facilement trouver la matrice de g^2 dans la base standard ordonnée $(1, g, g^2, g^3)$:

$$g^2 \cdot 1 = g^2, \quad g^2 \cdot g = g^3, \quad g^2 \cdot g^2 = 1 \quad \text{et} \quad g^2 \cdot g^3 = g,$$

ce qui nous donne la représentation matricielle suivante:

$$X(g^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant de même pour les autres éléments du groupe, on obtient:

$$X(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X(g^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque: Notons que toutes les matrices obtenues dans l'exemple ci-dessus sont des matrices de permutations distinctes. En général, la représentation régulière de G représente G comme sous-groupe du groupe symétrique à $|G|$ éléments.

Définition 1.3.19 Soit V un G-module. Un sous-module de V est un sous-espace W qui est *fermé sous l'action* de G, c'est-à-dire

$$w \in W \Rightarrow g \cdot w \in W,$$

pour tout $g \in G$. On dit aussi que W est *invariant* (ou G-invariant).

Remarque: Tout G-module V admet les sous-modules $W = V$ et $W = \{0\}$. Ces sous-modules sont appelés *sous-modules triviaux*.

Définition 1.3.20 Un G-module V non nul est *réductible* s'il contient un sous-module non-trivial W. Sinon, il est dit *irréductible*. Autrement dit, une représentation $\varphi = G \to GL(V)$ est dite *irréductible* si $\{0\}$ et V sont les seuls sous-espaces invariants de V.

Définition 1.3.21 Soit V un espace vectoriel et U, W des sous-espaces de V. Alors, V est *somme directe* de U et W, notée $V = U \oplus W$, si chaque élément $v \in V$ peut s'écrire de manière unique comme une somme,

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W.$$

Si V est un G-module et U, V, des G-sous-modules, alors on dit que U et W sont compléments l'un de l'autre.

Théorème 1.3.2 (*Maschke*)
Soit G un groupe fini et soit V un G-module complexe non nul. Alors,

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \cdots W^{(k)},$$

où chaque $W^{(i)}$ est un G-sous-module irréductible de V. ☺

Remarque: Toute représentation se décompose de façon unique comme somme directe de représentations irréductibles. La théorie classique nous apprend aussi qu'il y a autant de représentations irréductibles de G que le nombre de classes de conjugaison dans G.

Définition 1.3.22 Soit $X(g)$, $g \in G$, une représentation matricielle. Alors, le *caractère* de X est

$$\chi(g) = \operatorname{tr} X(g),$$

où tr est la trace de la matrice.

Exemple 1.3.12 Si on considére la représentation par permutations de $\mathcal{S}_3$, introduite plus haut, alors, on trouve directement:

1. $\chi((1)(2)(3)) = 3$,
2. $\chi((1,2)\,(3)) = 1$,
3. $\chi((1,3)\,(2)) = 1$,
4. $\chi((1)\,(2,3)) = 1$,
5. $\chi((1,2,3)) = 0$,
6. $\chi((1,3,2)) = 0$.

Remarque: En général, si $\pi \in \mathcal{S}_n$ alors (pour la représentation par permutations),

$$\begin{aligned} \chi(\pi) &= \text{nombre de 1 dans la diagonale de}\, X(\pi), \\ &= \text{nombre de points fixes de}\, \pi. \end{aligned}$$

Définition 1.3.23 À une représentation $\mathcal{V}$ de $\mathcal{S}_n$ on associe une fonction symétrique $\mathcal{F}(\mathcal{V})$, appelé *l'image de Frobenius* de $\mathcal{V}$, comme suit:

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} \chi^{\mathcal{V}}(\sigma_\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda},$$

où σ_λ est n'importe quelle permutation de type cyclique λ, $\chi^{\mathcal{V}}$ est le caractère de $\mathcal{V}$ et $z_\mu = 1^{m_1} m_1!\, 2^{m_2} m_2! \cdots n^{m_n} m_n!$ si $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n})$.

Définition 1.3.24 Étant donné un partage λ, on construit une représentation irréductible de $\mathcal{S}_n$, notée V_λ, qui a comme base

$$\{\Delta_T : T\, \text{tableau de Young standard de forme}\, \lambda\}.$$

(Voir définition 3.0.10).

Remarque: La transformée de Frobenius transforme un caractère en une fonction symétrique, et envoie les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_n$ sur les fonctions de Schur. Si $\mathcal{V}$, une représentation de $\mathcal{S}_n$, se décompose comme

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda V^\lambda, \quad a_\lambda \in \mathbb{N},$$

avec V^λ irréductibles (étiqueté de façon "naturelle", pour plus de détails voir la remarque après l'exemple 3.0.5.), alors,

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda s_\lambda.$$

On peut donc ramener le problème de la décomposition d'une représentation $\mathcal{V}$ en composantes irréductibles à celui d'écrire $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ dans la base $\{s_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$.

CHAPITRE II

LES POLYNÔMES DE MACDONALD

Dans ce chapitre, nous présentons une famille de polynômes symétriques introduit par Macdonald, les P_μ (Macdonald, 1995), ainsi qu'une renormalisation de ces polynômes en les polynômes H_μ.

2.1 Les polynômes P_μ

Définition 2.1.1 Considérons les fonctions symétriques avec coefficients dans l'anneau $\mathbb{Q}(q,t)$ des fonctions rationnelles en q et t. Macdonald a introduit un *q-t produit scalaire* de la façon suivante:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda(q,t),$$

où

$$z_\lambda(q,t) = \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}} \right) z_\lambda.$$

Remarque: Il est clair que ce produit scalaire se spécialise en celui du chapitre précédent (définition 1.3.9) lorsqu'on pose $q = t$. Nous verrons plus loin comment Macdonald a pu être amené à considérer ce produit scalaire étendu.

Pour simplifier la présentation de ce qui suit, il est utile d'introduire une notation empruntée à la théorie des λ-anneau. Voir (Knutson, 1973).

Définition 2.1.2 Une $\lambda-$*substitution* dans une fonction symétrique est une extension linéaire et multiplicative d'une substitution explicitement définie pour les sommes de puissances. Autrement dit, les $\lambda-$ *substitutions* donnent une interprétation des fonctions symétriques comme opérateurs. Dans ce cas, à la somme de puissances p_k, correspond l'opération qui consiste à substituer les variables d'une expression par leur $k^{\text{ième}}$ puissance. Si $g(X)$ est une fonction symétrique de $X = x_1, x_2, \cdots, x_n$, on note cette substitution $p_k[g(X)]$ et $p_k[g(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = g(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$. Une autre façon de voir cela est que pour chaque famille, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d'éléments α_k d'un anneau $\mathcal{A}$, on définit une $\lambda-$*substitution* comme l'unique morphisme d'anneaux:

$$\theta : \Lambda \to \mathcal{A},$$

qu'on peut caractériser en posant pour chaque somme de puissances p_k:

$$\theta(p_k) := \alpha_k.$$

Comme les p_k sont algébriquement indépendants, ceci est une bonne définition.

Exemple 2.1.1 Soit $X = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Alors la substitution $\frac{X}{1-t}$ dans une fonction symétrique f donnée, noté $f[\frac{X}{1-t}]$, correspond à l'extension linéaire et multiplicative de

$$p_k[X] = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \cdots \ \mapsto \ p_k[\tfrac{X}{1-t}] = \frac{1}{1-t^k} p_k[X].$$

Exemple 2.1.2

$$h_n[1-q] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ 1 & \text{si } n = 0, \\ (1-q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Démonstration:</u>

Rappelons qu'on a

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \exp\left(\sum_{k\geq 1} p_k \frac{t^k}{k}\right).$$

Ceci implique que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} h_n[1-q]t^n &= \exp\left(\sum_{k\geq 1} p_k[1-q]\frac{t^k}{k}\right) = \exp\left(\sum_{k\geq 1}(1-q^k)\frac{t^k}{k}\right), \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k} - \sum_{k\geq 1}\frac{(qt)^k}{k}\right) = \left(\frac{1}{1-t}\right)\left(\frac{1}{1-qt}\right)^{-1}, \\
&= \frac{1-qt}{1-t}.
\end{aligned}$$

Remarquons que,

$$\frac{1-qt}{1-t} = 1 + (1-q) + (1-q)t + (1-q)t^2 + \cdots$$

et on obtient le résultat voulu. ☺

Exemple 2.1.3

$$s_\lambda[1-q] = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_2 \geq 2, \\ (-q)^{n-k}(1-q) & \text{si } \lambda = k\cdot 1^{n-k} \text{ (équerre)}. \end{cases}$$

<u>Démonstration:</u> Directement via la formule de Jacobi-Trudi. Nous allons illustrer ce calcul pour les $\lambda \vdash 4$:

- Pour $\lambda = 1^4$:

  Selon la formule de Jacobi-Trudi on a

  $$s_{1^4} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 \end{pmatrix}.$$

  Étant donné que la λ-susbtitution $f[1-q]$ est linéaire et multiplicative, on obtient que:

  $$s_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}[1-q] = \text{dét}\begin{pmatrix} 1-q & 1-q & 1-q & 1-q \\ 1 & 1-q & 1-q & 1-q \\ 0 & 1 & 1-q & 1-q \\ 0 & 0 & 1 & 1-q \end{pmatrix} = q^4 - q^3,$$

puisque $h_i[1-q] = 1-q$ pour $i \geq 1$.

- De même, pour $\lambda = 211$:

$$s_{211} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ h_0 & h_1 & h_2 \\ h_{-1} & h_0 & h_1 \end{pmatrix},$$

et donc,

$$s_{\yng(2,1,1)}[1-q] = \text{dét}\begin{pmatrix} 1-q & 1-q & 1-q \\ 1 & 1-q & 1-q \\ 0 & 1 & 1-q \end{pmatrix} = q^2 - q^3.$$

- Et encore, pour $\lambda = 22$:

$$s_{\yng(2,2)}[1-q] = \text{dét}\begin{pmatrix} 1-q & 1-q \\ 1-q & 1-q \end{pmatrix} = 0\,.$$

Remarquons que chaque fois que $\lambda_2 \geq 2$ on a deux lignes complètes de "$1-q$" et donc, le déterminant s'annule.

- Pour $\lambda = 31$:

$$s_{\yng(3,1)}[1-q] = \text{dét}\begin{pmatrix} 1-q & 1-q \\ 1 & 1-q \end{pmatrix} = q^2 - q.$$

- Pour $\lambda = 4$:

$$s_{\yng(4)}[1-q] = \text{dét}\,(h_4[1-q]) = 1-q.$$

Définition 2.1.3 On peut aussi décrire le *q-t produit scalaire* de la façon suivante:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \begin{cases} z_\mu p_\mu \left[\frac{1-q}{1-t}\right] & \text{si } \mu = \lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.1.4 Macdonald a établi l'existence (Macdonald, 1995) d'une base de fonctions symétriques $(P_\mu(X; q, t))_\mu$, uniquement déterminée par les deux conditions suivantes:

$$1)\ P_\mu = m_\mu + \sum_{\lambda \prec \mu} \xi_{\mu\lambda}(q,t) m_\lambda,$$

$$2)\ \langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0, \text{ pour } \lambda \neq \mu,$$

où $\lambda \prec \mu$ indique que λ est plus petit que μ selon l'ordre de la dominance et où les $\xi_{\mu\lambda}(q,t)$ sont des polynômes rationnels en q,t. (Il est facile de remarquer que lorsque $q = t$, on a $P_\lambda(q,q) = s_\lambda$.)

Remarque: Une preuve de l'existence des P_μ a été donnée pour la première fois dans l'article “A New Class of Symmetric Functions” (Macdonald, 1988). En fait, on peut construire les P_μ en orthonormalisant, via Gram-Schmidt, les m_μ, après avoir montré que l'ordre total choisi pour procéder au calcul, pourvu qu'il étende l'ordre de la dominance, n'influence pas le résultat.

Exemple 2.1.4 Ainsi, pour $\mu \vdash 4$, on obtient:

1. $P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t) =$

$$\begin{aligned}
&\frac{(q^2+q+1)\,(q^2+1)\,(q+1)^2\,(t-1)^3\,{p_1}^4}{24\,(q\,t-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)} \\
&\quad + \frac{(q-1)\,(q+1)\,(q^2+q+1)\,(q^2+1)\,(t-1)^2\,(t+1)\,{p_1}^2\,p_2}{4\,(q\,t-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)} \\
&\quad + \frac{(q^2+1)\,(q-1)^2\,(q+1)^2\,(t-1)\,(1+t+t^2)\,p_1\,p_3}{3\,(q\,t-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)} \\
&\quad + \frac{(q^2+q+1)\,(q^2+1)\,(q-1)^2\,(t-1)\,(t+1)^2\,{p_2}^2}{8\,(q\,t-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)} \\
&\quad + \frac{(q+1)\,(q^2+q+1)\,(q-1)^3\,(t+1)\,(t^2+1)\,p_4}{4\,(q\,t-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)},
\end{aligned}$$

2. $P_{31}(q,t) = P_{\substack{\square \\ \square\square\square}}(q,t) =$

$$\begin{aligned}
&\frac{(q+1)\,(t-1)^2\,(3\,q^2\,t+q^2+2\,q\,t+2\,q+t+3)\,{p_1}^4}{24\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&\quad + \frac{(t-1)\,(t+1)\,(q^3\,t+q^3-q^2\,t+q^2-q\,t+q-t-1)\,{p_1}^2\,p_2}{4\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{(q-1)\,(q+1)\,(t^2+t+1)\,(-q+t)\,p_1\,p_3}{3\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&- \frac{(q-1)\,(q^2+1)\,(t-1)\,(t+1)^2\,{p_2}^2}{8\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&- \frac{(q+1)\,(q-1)^2\,(t+1)\,(t^2+1)\,p_4}{4\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)}\,,
\end{aligned}
$$

3. $P_{22}(q,t) = P_{\tiny\yng(2,2)}(q,t) =$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(q+1)\,(t-1)^2\,(2\,q\,t+q+t+2)\,{p_1}^4}{24\,(q\,t^2-1)\,(q\,t-1)} \\
&\quad - \frac{(q+1)\,(t-1)\,(t+1)\,(-q+t)\,{p_1}^2\,p_2}{4\,(q\,t^2-1)\,(q\,t-1)} \\
&\quad - \frac{(q-1)\,(q+1)\,(t-1)\,(t^2+t+1)\,p_1\,p_3}{3\,(q\,t^2-1)\,(q\,t-1)} \\
&\quad + \frac{(t+1)\,(2\,q^2\,t^2-q^2\,t-q\,t^2+q^2-2\,q\,t+t^2-q-t+2)\,{p_2}^2}{8\,(q\,t^2-1)\,(q\,t-1)} \\
&\quad + \frac{(q-1)\,(t^2+1)\,(-q+t)\,p_4}{4\,(q\,t^2-1)\,(q\,t-1)}\,,
\end{aligned}
$$

4. $P_{211}(q,t) = P_{\tiny\yng(2,1,1)}(q,t) =$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(t-1)\,(3\,q\,t^2+2\,q\,t+t^2+q+2\,t+3)\,{p_1}^4}{24\,(q\,t^3-1)} \\
&\quad - \frac{(q\,t^3-q\,t^2+t^3-q\,t+t^2-q+t-1)\,{p_1}^2\,p_2}{4\,(q\,t^3-1)} \\
&\quad + \frac{(t^2+t+1)\,(-q+t)\,p_1\,p_3}{3\,(q\,t^3-1)} - \frac{(q-1)\,(t+1)\,(t^2+1)\,{p_2}^2}{8\,(q\,t^3-1)} \\
&\quad + \frac{(q-1)\,(t+1)\,(t^2+1)\,p_4}{4\,(q\,t^3-1)}\,,
\end{aligned}
$$

5. $P_{1111}(q,t) = P_{\tiny\yng(1,1,1,1)}(q,t) =$

$$
\frac{{p_1}^4}{24} - \frac{{p_1}^2\,p_2}{4} + \frac{p_1\,p_3}{3} + \frac{{p_2}^2}{8} - \frac{p_4}{4}\,.
$$

Remarques: Macdonald a montré qu'on a les spécialisations suivantes:

1. $P_\lambda(X;q,q) = s_\lambda$,
2. $P_\lambda(X;q,1) = m_\lambda$,
3. $P_\lambda(X;1,t) = e_{\lambda'}$.

Exemple 2.1.5 Dans le cas de $P_4(q,t)$, on a:

1. Si on exprime $P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t)$ à l'aide des fonctions de Schur, on obtient:

   $$P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t) =$$
   $$s_4 + \frac{(q^2+q+1)\,(t-q)\,s_{31}}{q^3\,t-1} + \frac{q\,(q^2+1)\,(-1+t)\,(t-q)\,s_{22}}{(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}$$
   $$+ \frac{(q^2+q+1)\,(t-q)\,(t-q^2)\,s_{211}}{(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)} + \frac{(t-q^2)\,(t-q^3)\,(t-q)\,s_{1111}}{(t\,q-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}.$$

   Lorsque l'on substitue $t = q$ dans cette équation, on obtient bien que

   $$P_4(q,q) = P_{\square\square\square\square}(q,q) = s_4.$$

2. Exprimant $P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t)$ en fonctions des monomiales, on obtient:

   $$P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t) =$$
   $$m_4 + \frac{(1+q)\,(q^2+1)\,(t-1)\,m_{31}}{q^3\,t-1}$$
   $$+ \frac{(q^2+1)\,(q^2+q+1)\,(t-1)\,(t\,q-1)\,m_{22}}{(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}$$
   $$+ \frac{(1+q)\,(q^2+1)\,(q^2+q+1)\,(t-1)\,m_{211}}{(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}$$
   $$+ \frac{(q^2+1)\,(q^2+q+1)\,(1+q)^2\,(t-1)^3\,m_{1111}}{(t\,q-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}.$$

   Et posant $t = 1$, on a bien

   $$P_4(1,t) = P_{\square\square\square\square}(1,t) = m_4.$$

3. Enfin, exprimant $P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t)$ en fonctions des élémentaires, on obtient:

   $$P_4(q,t) = P_{\square\square\square\square}(q,t) =$$
   $${e_1}^4 - \frac{(q-1)\,(q^2+3\,q^2\,t+2\,t\,q+2\,q+t+3)\,e_2\,{e_1}^2}{q^3\,t-1}$$
   $$+ \frac{(q^2+q+1)\,(q-1)^2\,(t+1)\,(t\,q+1)\,{e_2}^2}{(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}$$
   $$+ \frac{(1+q)\,(q-1)^2\,(q^2+q^2\,t+2\,q^2\,t^2+q\,t^2+2\,t\,q+q+t^2+t+2)\,e_3\,e_1}{(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}$$
   $$- \frac{(1+q)\,(q^2+q+1)\,(q-1)^3\,(t+1)\,(t^2+1)\,e_4}{(t\,q-1)\,(q^3\,t-1)\,(q^2\,t-1)}.$$

   Et pour $q = 1$, on a

   $$P_4(1,t) = P_{\square\square\square\square}(1,t) = e_{1^4}.$$

2.2 Les polynômes H_μ

Le développement suivant est une reconstruction “fictive” des observations de Macdonald. En étudiant des tables de P_λ, nous allons constater qu'on est amené à poser la définition suivante:

Définition 2.2.1 On définit les polynômes $H_\mu(X;q,t)$ de la façon suivante:

$$H_\mu(X;q,t) = \prod_{c\,\in\,\mu} (1 - q^{a(c)} t^{l(c)+1})\, P_\mu \left[\frac{X}{1-t}; q, t \right],$$

où c varie dans l'ensemble des cases de μ.

Considérons l'exemple suivant:

Exemple 2.2.1 On exprime P_{31} en fonction des sommes de puissances, pour obtenir:

$P_{31}(q,t) = P_{\yng(1,3)}(q,t) =$

$$\begin{aligned} &\frac{(1+q)\,\left(3\,q^2\,t + 2\,q\,t + t + q^2 + 2\,q + 3\right)(t-1)^2\,{p_1}^4}{24\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\ &\quad + \frac{\left(-q^2\,t - t - q\,t + q^3\,t - 1 + q^2 + q^3 + q\right)(t-1)\,(t+1)\,p_2\,{p_1}^2}{4\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\ &\quad - \frac{(q-1)\,(1+q)\,(t-q)\,\left(t^2+t+1\right)p_3\,p_1}{3\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\ &\quad - \frac{(q-1)\,\left(1+q^2\right)(t-1)\,(t+1)^2\,{p_2}^2}{8\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\ &\quad - \frac{(1+q)\,(q-1)^2\,(t+1)\,\left(t^2+1\right)p_4}{4\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)}. \end{aligned}$$

On est amené à réécrire ce polynôme de la façon suivante, après avoir observé que les facteurs en “t” associés à chaque somme de puissances p_μ font intervenir tous les polynômes cyclotomiques $\varphi_d(t)$ pour d diviseur de n:

$P_{31}(q,t) = P_{\yng(1,3)}(q,t) =$

$$\frac{(1+q)\,\left(3\,q^2\,t + 2\,q\,t + t + q^2 + 2\,q + 3\right)}{24\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \cdot (1-t)^4\,{p_1}^4$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{(-q^2\,t - t - q\,t + q^3\,t - 1 + q^2 + q^3 + q)}{4\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \cdot (1-t)^2\,{p_1}^2\,(1-t^2)p_2 \\
&- \frac{(q-1)\,(1+q)\,(t-q)}{3\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \cdot (1-t)\,p_1\,(1-t^3)p_3 \\
&- \frac{(q-1)\,(1+q^2)}{8\,(t-1)\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \cdot (1-t^2)^2{p_2}^2 \\
&+ \frac{(1+q)\,(-1+q)^2}{4\,(t-1)\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \cdot (1-t^4)p_4\,.
\end{aligned}
$$

Il devient alors naturel de penser à procéder à la λ-substitution $P_\mu\left[\frac{X}{1-t};q,t\right]$, associant $\dfrac{p_k}{1-t^k}$ à p_k. On remarque alors que, dans le résultat, tous les coefficients ont même dénominateur, à une constante près:

$$
\begin{aligned}
P_{31}\left[\tfrac{X}{1-t};q,t\right] \;=\; & \frac{(1+q)\,(3\,q^2\,t + 2\,q\,t + t + q^2 + 2\,q + 3)\,{p_1}^4}{24\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&- \frac{(-q^2\,t - t - q\,t + q^3\,t - 1 + q^2 + q^3 + q)\,{p_1}^2\,p_2}{4\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&- \frac{(q-1)\,(1+q)\,(t-q)\,p_1\,p_3}{3\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&- \frac{(q-1)\,(1+q^2)\,(t-1){p_2}^2}{8\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)} \\
&- \frac{(1+q)\,(-1+q)^2\,(t-1)\,p_4}{4\,(t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1)}\,.
\end{aligned}
$$

Macdonald a trouvé une description combinatoire de ce dénominateur, à savoir:

$$\prod_{c\,\in\,\mu}(1-q^{a(c)}t^{l(c)+1}).$$

La définition des polynômes H_μ utilise ces opérations pour “renormaliser” P_μ. Dans notre exemple,

$$\prod_{c\,\in\,\mu}(1-q^{a(c)}t^{l(c)+1}) = (1-q^2t^2)(1-qt)(1-t)(1-t) = (t-1)^2\,(q\,t-1)^2\,(q\,t+1),$$

on a donc:

$H_{31} = H_{\boxminus\!\square\square} =$

$$
\begin{aligned}
& \frac{(1+q)\,(3\,q^2\,t + 2\,q\,t + t + q^2 + 2\,q + 3)\,{p_1}^4}{24} \\
&\quad - \frac{(-q^2\,t - t - q\,t + q^3\,t - 1 + q^2 + q^3 + q)\,{p_1}^2\,p_2}{4}
\end{aligned}
$$

$$- \frac{(q-1)\,(q+1)\,(t-q)\,p_1\,p_3}{3} - \frac{(q-1)\,(1+q^2)\,(t-1)\,{p_2}^2}{8}$$
$$+ \frac{(1+q)\,(-1+q)^2\,(t-1)\,p_4}{4}.$$

Il est alors naturel de reformuler cette dernière expression en terme de la base des Schur pour obtenir, finalement, l'expression particulièrement “jolie”:

$$H_{31} = t\,s_4 + (q^2t + qt + 1)s_{31} + q(qt+1)s_{22} + q(q^2t + q + 1)s_{211} + q^3 s_{1111}.$$

Exemple 2.2.2 Pour $\mu \vdash 4$, les polynômes H_μ, exprimés dans la base des Schur sont:

- $H_4 = s_4 + q(q^2+q+1)s_{31} + q^2(q^2+1)s_{22} + q^3(q^2+q+1)s_{211} + q^6 s_{1111}$,
- $H_{31} = ts_4 + (1 + tq + q^2t)s_{3,1} + q(tq+1)s_{2,2} + q(q^2t + 1 + q)s_{2,1,1} + q^3 s_{1,1,1,1}$,
- $H_{22} = t^2 s_4 + t(q+1+tq)s_{31} + (q^2t^2+1)s_{22} + q(t+1+tq)s_{211} + q^2 s_{1111}$,
- $H_{211} = t^3 s_4 + t(qt^2+t+1)s_{31} + t(tq+1)s_{22} + (tq+qt^2+1)s_{211} + q\,s_{1111}$,
- $H_{1^4} = t^6 s_4 + t^3(1+t+t^2)s_{31} + t^2(t^2+1)s_{22} + t(1+t+t^2)s_{211} + s_{1111}$.

Définition 2.2.2 On définit les q,t *“fonctions” de Kostka*, notées $K_{\lambda\mu}(q,t)$, par l'expression:

$$H_\mu(X;q,t) = \sum_\lambda s_\lambda K_{\lambda\mu}(q,t).$$

Il est clair, à priori, que $K_{\lambda\mu}(q,t)$ est une fonction rationnelle en q,t.

Exemple 2.2.3 Les matrices $K(n;q,t)$ de “fonctions” de Kostka, pour $1 \leq n \leq 4$ sont:

1. $K(1;q,t) = (1)$,
2. $K(2;q,t) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 1 & t \end{pmatrix}$,

3. $K(3;q,t) = \begin{pmatrix} 1 & q\,(1+q) & q^3 \\ 1 & t+q & q\,t \\ 1 & t\,(1+t) & t^3 \end{pmatrix}$,

4. $K(4;q,t) = \begin{pmatrix} 1 & q\,(1+q+q^2) & q^2+q^4 & q^3\,(1+q+q^2) & q^6 \\ 1 & q+q^2+t & q\,(t+q) & q\,(q\,t+t+q^2) & q^3\,t \\ 1 & q\,t+t+q & t^2+q^2 & q\,t\,(1+q+t) & q^2\,t^2 \\ 1 & q+t+t^2 & t^2+q\,t & t\,(t^2+q\,t+q) & q\,t^3 \\ 1 & t\,(1+t+t^2) & t^2+t^4 & t^3\,(1+t+t^2) & t^6 \end{pmatrix}$.

Figure 2.1: Tables de fonctions de Kostka

Remarque: On observe sur ces exemples que les “fonctions” de Kostka sont des polynômes $\in \mathbb{N}[q,t]$.

- Ceci a été observé par Macdonald, en 1988, qui en a fait une conjecture (formulée ci-après).
- Indépendamment,
  1) Sahi-Knop,
  2) Garsia-Tesler,
  3) Noumi-Kirilov,

  ont donné, en 1996, des démonstrations différentes, que $K_{\lambda\mu}(q,t) \in \mathbb{Z}[q,t]$.

Remarque: Il découle de résultats de Macdonald que lorsqu'on pose $q = 0$ et $t = 1$ dans les matrices précédentes, on obtient les matrices des nombres de Kostka. (Voir figure 1.1).

Définition 2.2.3 Comme on le verra, il est naturel de renormaliser les H_μ de la façon suivante:

$$\widetilde{H}_\mu(X;q,t) = H_\mu(X;q,1/t)t^{n(\mu)},$$

et, de la même manière, on définit:

$$\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) = K_{\lambda\mu}(q,1/t)t^{n(\mu)}.$$

En résumé, on a donc:

Conjecture 2.2.1 (*Macdonald*)

$$\widetilde{H}_\mu(X;q,t) = \sum_\lambda s_\lambda \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t),$$

où les $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t)$ sont des polynômes en q et t, à coefficients <u>*entiers positifs!!!*</u>

Exemple 2.2.4 Pour $\mu \vdash 4$, les $\widetilde{H}_\mu(X;q,t)$ sont:

- $\widetilde{H}_4 = s_4 + q(q^2+q+1)s_{31} + q^2(q^2+1)s_{22} + q^3(q^2+q+1)s_{211} + q^6 s_{1111}$,
- $\widetilde{H}_{31} = s_4 + (q^2+q+t)s_{31} + q(q+t)s_{22} + q(q^2+tq+t)s_{211} + q^3 t s_{1111}$,
- $\widetilde{H}_{22} = s_4 + (tq+t+q)s_{31} + (q^2+t^2)s_{22} + tq(t+q+1)s_{211} + t^2q^2 s_{1111}$,
- $\widetilde{H}_{211} = s_4 + (t^2+t+q)s_{31} + t(t+q)s_{22} + t(t^2+tq+q)s_{211} + t^3 q s_{1111}$,
- $\widetilde{H}_{1111} = s_4 + t(t^2+t+1)s_{31} + t^2(t^2+1)s_{22} + t^3(t^2+t+1)s_{211} + t^6 s_{1111}$.

CHAPITRE III

LES ESPACES $\mathbf{M}_\mu(X)$

Nous présentons ici les espaces $\mathbf{M}_\mu(X)$, où $X = x_1, \ldots, x_n$ si $\mu \vdash n$, étudiés par DeConcini-Procesi et aussi par A. Garsia-N. Bergeron, qui sont en fait un sous-cas des espaces qui nous intéressent, ainsi que quelques résultats importants qui s'y rattachent. Les résultats et leur démonstration ont été tirés de l'article: "On certain spaces of harmonic polynomials", de N. Bergeron et A. Garsia.

Définition 3.0.4 Étant donné un partage $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ (dans lequel on accepte les parts nulles), on dénote par $k(\mu)$ le *nombre de composantes non nulles de* μ et par $d_k(\mu)$ la *somme des* k *premières parts de* μ' (le partage conjugué à μ):

$$d_k(\mu) := \mu'_1 + \mu'_2 + \cdots + \mu'_k,$$

$1 \leq k \leq n$.

Définition 3.0.5 Soit S un sous-ensemble de $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On dénote $e_r(S)$ la r^{ieme} *fonction symétrique élémentaire des variables dans* S. Alors, $\mathcal{C}_\mu$ est l'*ensemble des fonctions symétriques élémentaires partielles* suivant:

$$\mathcal{C}_\mu := \{e_r(S) : k \geq r > k - d_k(\mu), |S| = k, S \subseteq X_n\}.$$

Définition 3.0.6 On note I_μ, l'*idéal engendré par les éléments de* $\mathcal{C}_\mu$. Cet idéal est introduit par DeConcini et Procesi dans: "Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety" (DeConcini - Procesi, 1981). Symboliquement, on écrit:

$$I_\mu = (\mathcal{C}_\mu).$$

Définition 3.0.7 On définit un produit scalaire sur les polynômes en posant:

$$\langle P, Q\rangle = L_0\, P(\partial X_n)Q(X_n),$$

où L_0 représente l'opérateur linéaire qui évalue un polynôme en 0, P et Q sont deux polynômes en $X_n = x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $P(\partial X_n)$ est l'opérateur différentiel obtenu en remplaçant x_i par ∂x_i dans le polynôme P.

DeConcini et Procesi posent:

Définition 3.0.8

$$\mathbf{M}_\mu(X) := {I_\mu}^\perp,$$

où ${I_\mu}^\perp$ représente le *complément orthogonal* de I_μ, par rapport au produit scalaire défini ci-dessus et, si $\mu \vdash n$, alors $X = x_1, \cdots, x_n$.

Définition 3.0.9 Soit A un sous-ensemble ordonné de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On dénote par $\Delta(X_A)$ le *déterminant à la Vandermonde* dans le sous-alphabet

$$X_A = x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_m}.$$

Plus précisément,

$$\Delta(X_A) = \text{dét}\mid x_{a_i}^{j-1}\mid_{i,j=1}^{m}.$$

Définition 3.0.10 Soit $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n)$ un partage de n. Soit T un tableau injectif de forme μ avec comme entrées les entiers $1, 2, \ldots, n$ et soient $C_1, C_2, \ldots, C_h$ les colonnes de T. Les éléments de C_i héritent de l'ordre correspondant à la lecture de bas en haut dans T. On pose:

$$\Delta_T(X) := \Delta(X_{C_1})\Delta(X_{C_2})\cdots\Delta(X_{C_h}),$$

qu'on appelle le *polynôme de Garnir* associé à T.

Exemple 3.0.5 Soit T_1 le tableau suivant:

1		
5	3	4
2	6	7

alors,

$$\Delta_{T_1}(X) = \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_5 & {x_5}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \end{pmatrix} \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & x_6 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & x_7 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Remarque: Ces polynômes ont été utilisés par Garnir (Garnir, 1950), dans sa reconstruction des représentations naturelles de Young. Plus précisément, si on note $ST(\mu)$ l'ensemble de tous les tableaux standards de forme μ, alors Garnir a montré que l'ensemble

$$\{\Delta_T(X) \mid T \in ST(\mu)\}$$

est linéairement indépendant et engendre un sous-espace invariant V_μ, de l'espace $\mathbb{Q}[x]$ qui est irréductible. De plus, comme on l'a déjà annoncé, $\mathcal{F}(V_\mu) = s_\mu$ (voir chapitre 1 section 3.4).

Maintenant, passons au résultat le plus important de cette section. Appelons G_μ les *combinaisons linéaires de translatées d'éléments de Garnir standards de forme* μ, c'est-à-dire

$$G_\mu = \mathcal{L}[\Delta_T(X+t) : T \in ST(\mu),\, t \in \mathbb{Z}^n].$$

Utilisant le développement de Taylor autour de X, on constate qu'on peut aussi écrire G_μ de la façon suivante:

$$G_\mu = \mathcal{L}[\partial_x^p \Delta_T(X) : T \in ST(\mu)],$$

pour avoir une description plus concrète et calculable des espaces $\mathbf{M}_\mu$ et aussi parce que nous verrons que certains de ces espaces se généralisent joliment. On va faire la preuve que $G_\mu = \mathbf{M}_\mu$.

Pour ce faire, nous suivrons les étapes suivantes:

1. On va montrer que chaque élément de G_μ est aussi un élément de $\mathbf{M}_\mu$, i.e.: $G_\mu \subseteq \mathbf{M}_\mu$.
2. Ensuite, nous montrerons que la dimension de $\mathbf{M}_\mu$ est au plus $\binom{n}{\mu}$.
3. Pour finir, on va construire un sous-ensemble indépendant de G_μ de cardinalité $\binom{n}{\mu}$.

Démontrons d'abord un lemme qui nous sera utile dans le développement de cette preuve:

Lemme 3.0.1 *Pour tout polynôme symétrique P, avec terme constant nulle, on a*

$$P(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n})\Delta(X) = 0.$$

Démonstration:

Comme P est symétrique et que $\Delta(X)$ est un polynôme antisymétrique, on a que $P(\partial)\Delta(X)$ est antisymétrique. En effet:

$$\begin{aligned} \sigma P(\partial)\Delta(X) &= P(\partial)\Delta(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_n}), \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) P(\partial)\Delta(X). \end{aligned}$$

On a vu (lemme 1.3.1) qu'un polynôme antisymétrique est soit le polynôme nul soit un multiple de $\Delta(X)$. Étant donné que le terme constant de P est nul, on doit avoir que le degré de $P(\partial)\Delta(X)$ est plus petit que le degré de $\Delta(X)$. Ceci implique que $P(\partial)\Delta(X)$ ne peut être un multiple non trivial de $\Delta(X)$ et donc que $P(\partial)\Delta(X) = 0$. ☺

Lemme 3.0.2 *On a que*

$$I_\mu{}^\perp := \mathbf{M}_\mu(X) = \{Q \mid P(\partial)Q(X) = 0, \text{pour tout}\, P \in I_\mu\}.$$

Démonstration:

$Q \in I_\mu{}^\perp$ si $\langle X^\alpha P, Q\rangle = 0$, pour tout $P \in I_\mu$ et tout X^α puisque $P \in I_\mu$ implique que $X^\alpha P(X) \in I_\mu$. Donc, tous les coefficients de $P(\partial)Q(X)$ sont nuls (par le définition 3.0.7). ☺

Proposition 3.0.1 *On a que*

$$G_\mu = \mathcal{L}[\partial_x^p \Delta_T(x) : T \in ST(\mu)] \subseteq \mathbf{M}_\mu.$$

Démonstation:

Il suffit de montrer que chaque élément de Garnir, $\Delta_T(x)$, est "tué" par les générateurs de l'idéal I_μ, puisque G_μ est engendré par les $\partial_x^p \Delta_T(X)$ et aussi parce que $P(\partial)X^p\Delta_T = 0$, pour tout $P \in I_\mu$ est équivalent à $P(\partial)\Delta_T = 0$, pour tout $P \in I_\mu$. Comme l'idéal I_μ est engendré par les $\mathcal{C}_\mu$, cela revient à montrer que pour chaque tableau T et pour chaque $e_r(S) \in \mathcal{C}_\mu$, on a

$$e_r(S)(\partial)\Delta_T(x) = 0. \tag{1}$$

D'après la définition de $\mathcal{C}_\mu$, on a pour $e_r(S) \in \mathcal{C}_\mu$ et $|S| = s$ que

$$r > s - \mu'_1 - \mu'_2 - \cdots - \mu'_s. \tag{2}$$

Soit $C_1, C_2, \ldots, C_n$, les colonnes de T (numérotées de gauche à droite) et soit

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n \quad (S_i = S \cap C_i), \tag{3}$$

la décomposition disjointe de S correspondante. On doit avoir

$$e_r(S)(\partial)\Delta_T(x) = \sum_{r_1+\cdots+r_n=r} \prod_{i=1}^{n} e_{r_i}(S_i)(\partial)\Delta(C_i). \tag{4}$$

Si dans l'équation (4), il existe un i tel que

$$r_i \geq 1 \quad \text{et} \quad S_i = C_i, \tag{5}$$

alors par la proposition 3.0.1 (avec $X_i = \{x_1, \ldots, x_n\}$ remplacé par C_i), on obtient pour cette indice i

$$e_{r_i}(S_i)(\partial)\Delta(C_i) = 0,$$

et on a bien que

$$e_r(S)(\partial)\Delta_T(x) = 0.$$

De plus, étant donné que $e_r(S) = 0$ si $r > |\,S\,|$, on doit avoir

$$r_i \leq |\; S_i \;|, \quad (\forall i, i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Ce qu'il faut montrer est qu'avec les conditions (2), (3) et (6) on a au moins un indice i qui satisfait (5) pour chacune des sommations dans (4). Soit donc $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ les indices i pour lesquels S_i est un sous-ensemble propre de la colonne correspondante C_i. Comme dans chaque $S_{i_a}(a = 1, \ldots, k)$, il manque au moins 1 élément de la colonne correspondante, alors, dans l'ensemble S, il manque au moins k éléments. On a donc que

$$s \leq n - k.$$

Donc, on a $t = n - k \geq s$ indices $j_1 < j_2 < \ldots < j_t$ tels que

$$S_{j_1} = C_{j_1}, \quad S_{j_2} = C_{j_2}, \quad \ldots, \quad S_{j_t} = C_{j_t}.$$

Pour montrer l'existence d'au moins un indice i qui satisfait (5), on doit montrer que pour chaque sommation dans (4) on a,

$$r_{j_1} + r_{j_2} + \cdots + r_{j_t} \geq 1, \tag{7}$$

(i.e qu'au moins un des r_{j_i} est non nul.) Mais, de (2), on a que

$$\begin{aligned} r_{j_1} + r_{j_2} + \cdots + r_{j_t} &= r - (r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_k}), \\ &> s - (\mu'_1 + \mu'_2 + \cdots + \mu'_s) - (r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_k}). \end{aligned}$$

Cependant, comme $|S_{j_b}| = |C_{j_b}| = \mu'_{j_b}$ (pour $b = 1, \ldots, t$), on peut réécrire cette équation comme suit:

$$r_{j_1}+r_{j_2}+\cdots+r_{j_t} > \sum_{a=1}^{k}(|\,S_{i_a}\,| \; -r_{i_a})+\mu'_{j_1}+\mu'_{j_2}+\cdots+\mu'_{j_t}-\mu'_1-\mu'_2-\cdots-\mu'_s.$$

La condition (6) nous donne alors que

$$\sum_{a=1}^{k}(|\,S_{i_a}\,| \; -r_{i_a}) \geq 0.$$

De plus, on a que

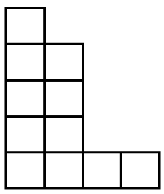
$$\mu'_{j_1}+\mu'_{j_2}+\cdots+\mu'_{j_t}-\mu'_1-\mu'_2-\cdots-\mu'_s \geq 0.$$

car $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_s$ sont les s plus petites parts de μ' et que $t \geq s$. Donc, on a que l'équation (7) est vérifiée et ceci complète la preuve. ☺

Énonçons maintenant quelques définitions et propositions (pour plus de détails voir (Bergeron N. - Garsia, 1992)), qui nous aiderons à démontrer les étapes deux et trois de notre résultat.

Définition 3.0.11 Étant donné un partage μ et une hauteur i plus petite ou égale au nombre de parts de μ, on dénote par $\mu^{(i)}$ le *partage obtenu en enlevant le coin le plus bas qui apparaît dans la ligne i ou dans une ligne au-dessus de i.*

Exemple 3.0.6 Pour le partage $\mu = 42221$:


,

On a $\mu^{(1)} = 32221$, $\mu^{(2)} = \mu^{(3)} = \mu^{(4)} = 42211$ et $\mu^{(5)} = 4222$.

Définition 3.0.12 On définit B_μ comme étant la *collection* de monômes obtenue de la récurrence suivante:

$$B_\mu = \sum_{i=1}^{\ell(\mu)} x^{i-1} B_{\mu^{(i)}}\,,$$

avec $B_\mu = \{1\}$ pour $\mu = (1)$.

Remarque: On emploie le mot “collection” pour souligner le fait qu'on confond un ensemble de monômes avec la somme de ceux-ci.

Exemple 3.0.7 Calculons B_{31}:

$$\begin{aligned} B_{31} &= \sum_{i=1}^{2} x^{i-1} B_{31^{(i)}}\,, \\ &= B_{31^{(1)}} + x B_{31^{(2)}}\,, \\ &= B_{21} + x B_3. \end{aligned}$$

Après calcul, on obtient:

$$\begin{aligned} B_{21} &= B_{11} + x B_2, \\ &= (1+x) + x(1), \\ &= 1 + 2x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_3 &= B_2, \\ &= 1. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$B_{31} = 1 + 3x.$$

Définition 3.0.13 On dénote par R_μ l'espace suivant:

$$R_\mu = \mathbb{Q}[X_n]/I_\mu\,.$$

Proposition 3.0.2 *L'ensemble des B_μ engendre l'espace R_μ. En d'autres termes,*

$$R_\mu = \mathcal{L}[x^\epsilon \in B_\mu].$$ ☺

Remarque: Cette proposition a été démontrée pour la première fois par DeConcini-Procesi (DeConcini - Procesi, 1981), puis, l'année suivante elle a été démontrée plus simplement par Tanisaki (Tanisaki, 1982).

Définition 3.0.14 On a que

$$m_T(X) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{h_i(T)-1},$$

où $h_i(T)$ dénote la hauteur de l'indice i dans le tableau T.

Remarque: On peut écrire chaque monôme $x^\epsilon \in B_\mu$ de la façon suivante:

$$x^\epsilon = m_{T_\epsilon}(x)/x^{\rho_\epsilon},$$

où T_ϵ est un tableau standard et ρ_ϵ un vecteur non-négatif.

Proposition 3.0.3 *L'ensemble des polynômes*

$$\{\partial^{\rho_\epsilon}\Delta_{T_\epsilon}(x) : x^\epsilon \in B_\mu\}$$

est un ensemble indépendant dans $\mathbf{M}_\mu$. ☺

On peut maintenant démontrer notre résultat:

Théorème 3.0.1 *On a l'égalité suivante:*

$$G_\mu = \mathbf{M}_\mu.$$

<u>Démonstration:</u>

De la récurrence de la définition 3.0.13, on tire que

$$\mathrm{card}(B_\mu) = \frac{n!}{\mu_1!\mu_2!\cdots\mu_n!} = \binom{n}{\mu}\ .$$

Alors, les propositions précédentes (3.0.1, 3.0.2, 3.0.3), et le fait que R_μ et $\mathbf{M}_\mu$ sont des $\mathcal{S}_n$-modules isomorphes entraînent les inégalités suivante:

$$\mathrm{card}(B_\mu) = \mathrm{card}(\{\partial^{\rho_\epsilon}\Delta_{T_\epsilon}(x)\})_{x^\epsilon\in B_\mu} \leq \dim(\mathbf{M}_\mu) = \dim(R_\mu) \leq \binom{n}{\mu}\ .$$

On a donc que

$$\binom{n}{\mu} \leq \dim(\mathbf{M}_\mu) \leq \binom{n}{\mu}\ .$$

Ceci implique que $\dim(\mathbf{M}_\mu) = \binom{n}{\mu} = \mathrm{card}(\{\partial^{\rho_\epsilon}\Delta_{T_\epsilon}(x)\})_{x^\epsilon\in B_\mu}$.
Donc, on a bien que $\mathbf{M}_\mu = \mathcal{L}[\partial_x^p\Delta_T(x) : T \in ST(\mu)]$, c'est-à-dire que

$$G_\mu = \mathbf{M}_\mu.$$

☺

Corollaire 3.0.1 *On tire de la démonstration du théorème précédent que:*

$$\dim\left(\mathbf{M}_\mu(X)\right) = \binom{n}{\mu}\ .$$ ☺

Nous allons voir maintenant une propriété intéressante des espaces $\mathbf{M}_\mu$. Pour ce faire nous devons rappeler le lemme suivant:

Lemme 3.0.3 (*Macdonald*)
Soit $\lambda, \mu \vdash n$, alors on a:

$$\lambda \succeq \mu \Longleftrightarrow \mu' \succeq \lambda'.$$

Démonstration:

Il est clair qu'on doit seulement démontrer une implication. On va donc supposer que $\mu' \not\geq \lambda'$ et nous verrons qu'alors $\lambda \not\geq \mu$. Donc, si $\mu' \not\geq \lambda'$ on a pour un certain $i \geq 1$ que

$$\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_j \leq \mu'_1 + \cdots + \mu'_j, \quad (1 \leq j \leq i-1)$$

et

$$\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i > \mu'_1 + \cdots + \mu'_i\,. \tag{8}$$

Et alors, on a que $\lambda'_i > \mu'_i$. Maintenant, on va poser $l = \lambda'_i$ et $m = \mu'_i$. Comme μ et λ sont deux partages d'un même entier, de (8) on tire que

$$\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \cdots < \mu'_{i+1} + \mu'_{i+2} + \cdots\,. \tag{9}$$

De plus, on a que $\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \cdots$ est égal au nombre de cases du diagramme λ strictement à droite de la $i^{ème}$ colonne, c'est-à-dire:

$$\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \cdots = \sum_{j=1}^{l} (\lambda_j - i).$$

De la même manière, on obtient

$$\mu'_{i+1} + \mu'_{i+2} + \cdots = \sum_{j=1}^{m} (\mu_j - i).$$

Alors, de (9), on a que

$$\sum_{j=1}^{m} (\mu_j - i) > \sum_{j=1}^{l} (\lambda_j - i) \geq \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - i). \tag{10}$$

La dernière égalité vient du fait que $l > m$ et $\lambda_j \geq i, \quad \forall j \quad 1 \geq j \geq l$. Et alors de (10) on a que

$$\mu_1 + \cdots + \mu_m > \lambda_1 + \cdots + \lambda_m,$$

ce qui implique que $\lambda \not\geq \mu$. ☺

Définition 3.0.15 On désigne par $\nu = \lambda \wedge \mu$ l'*infimum* de μ et λ dans le poset des partages avec l'ordre de la dominance $\preceq$. Ce poset est représenté par le diagramme de Hasse dont voici un exemple pour les partages de 6:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (6) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & (5,1) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & (4,2) & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
(3^2) & & & & (4,1^2) \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & (3,2,1) & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
(3,1^3) & & & & (2^3) \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & (2^2,1^2) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & (2,1^4) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & (1^6) & &
\end{array}
$$

Figure 3.1: Diagramme de Hasse des partages de 6 sous l'ordre de la dominance

Exemple 3.0.8 Par exemple, l'infimum de $\mu = 3111$ et $\lambda = 222$ est $\nu = 2211$, tandis que l'infimum de $\mu = 3111$ et $\lambda = 2211$ est $\nu = \lambda = 2211$.

Proposition 3.0.4 *Les sous-espaces $\mathbf{M}_\mu$ sont inclus les uns dans les autres selon l'ordre de la dominance des partages:*

$$\mu \preceq \lambda \Rightarrow \mathbf{M}_\mu \subseteq \mathbf{M}_\lambda. \tag{11}$$

De plus, on a pour n'importe quelle pair de partages λ et μ

$$\mathbf{M}_\lambda \cap \mathbf{M}_\mu = \mathbf{M}_{\lambda \wedge \mu}. \tag{12}$$

<u>Démonstration:</u>

Par la proposition précédente, on a que $\mu \preceq \lambda$ si et seulement si $\mu' \succeq \lambda'$. On a donc

$$\mu \preceq \lambda \Rightarrow d_k(\mu) \geq d_k(\lambda) \Rightarrow \mathcal{C}_\mu \supseteq \mathcal{C}_\lambda \Rightarrow I_\mu \supseteq I_\lambda.$$

On a alors démontré le résultat (11) puisque $\mathbf{M}_\mu$ est le complément orthogonal de I_μ. Pour prouver (12), notons qu'étant donné que nos partages ont des parts croissantes, la séquence $d(\mu) = (d_1(\mu), \ldots, d_n(\mu))$ satisfait les inégalités suivantes:

$$d_k(\mu) - d_{k-1}(\mu) \leq d_{k+1}(\mu) - d_k(\mu), \quad 1 \leq k \leq n,$$

où $d_0(\mu) = 0$. La séquence $d = (0 = d_0, d_1, \ldots, d_n)$ satisfait donc

$$2d_k \leq d_{k-1} + d_{k+1} \quad \forall k,\, 1 \leq k \leq n, \tag{13}$$

avec les différences $\nu'_k = d_k - d_{k-1}$ croissantes et on peut trouver un partage ν tel que $d_k(\nu) = d_k$. Posons maintenant $\nu = \lambda \wedge \mu$. On doit avoir

$$d_k(\nu) \geq d_k(\lambda) \quad \text{et} \quad d_k(\nu) \geq d_k(\mu).$$

Comme on a clairement que

$$d_k = \max(d_k(\lambda), d_k(\mu)),$$

satisfait les inégalités de (13), on en conclut que

$$d_k(\nu) = \max(d_k(\lambda), d_k(\mu)),$$

ce qui implique que

$$\mathcal{C}_\nu = \mathcal{C}_\lambda \cup \mathcal{C}_\mu. \tag{14}$$

Étant donné que $\mathbf{M}_\mu = I_\mu^\perp$, on a:

$$\mathbf{M}_\lambda \cap \mathbf{M}_\mu = \{Q \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n] : e_r(S)(\partial)Q = 0, \quad \forall\, e_r(S) \in \mathcal{C}_\lambda \cup \mathcal{C}_\mu\},$$

et le résultat (12) découle de (14) et du fait que $\mathbf{M}_\mu$ est le complément orthogonal de I_μ. ☺

CHAPITRE IV

LES ESPACES $\mathbf{M}_\mu(X, Y)$

Dans ce chapitre, nous introduisons, dans un premier temps, des espaces $\mathbf{M}_\mu(X, Y)$, qui généralisent les espaces $\mathbf{M}_\mu(X)$ du chapitre 3. Ils forment le principal objet d'étude de ce travail, et nous démontrons plusieurs propriétés les concernant. Ces espaces ont été introduits par Garsia et Haiman afin de fournir une famille de représentations bigraduées de $\mathcal{S}_n$ isomorphes à la représentation régulière qui permettrait de démontrer la conjecture de Macdonald (voir chapitre2, section2). La deuxième section du chapitre est consacrée au véritable but de ce travail, c'est-à-dire, l'étude de certaines intersections d'espaces $\mathbf{M}_\mu(X, Y)$ pour en donner des bases explicites. Nous allons expliquer, en détails et par étapes, nos expérimentations ainsi que les résultats qui en sont découlés. Sauf mention du contraire, les résultats et démonstrations de ce chapitre sont le fruit d'un travail commun de François Bergeron et de l'auteure.

4.1 Définition des espaces

À chaque partage μ, $\mu \vdash n$, on associe la matrice $\mathcal{V}_\mu := (x_i^{p_j}\, y_i^{q_j})_{1 \le i,j \le n}$, où les couples (p_j, q_j) représentent les coordonnées des cases de μ. Rappelons que les coordonnées cartésiennes, (a', l'), d'une case de μ correspondent respectivement au co-bras, a', et à la co-jambe, l', de cette case. On ordonne l'ensemble des coordonnées des cases de μ, en posant $(a'_1, l'_1) < (a'_2, l'_2)$ si $a'_1 + l'_1 < a'_2 + l'_2$ ou si $a'_1 + l'_1 = a'_2 + l'_2$ et $l'_1 < l'_2$.

Définition 4.1.1 Pour un partage μ, on pose

$$\Delta_\mu = \text{dét}\, |\, {x_i}^{p_j} {y_i}^{q_j}\, | = \text{dét}\, \mathcal{V}_\mu.$$

Exemple 4.1.1 Au partage $\mu = 31$ on associe les coordonnées cartésiennes:

$$\begin{array}{|c|cc}\hline 01 & & \\ \hline 00 & \multicolumn{1}{|c|}{10} & \multicolumn{1}{c|}{20} \\ \hline\end{array}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu = \Delta_{31} &= \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & {x_4}^2 \end{pmatrix}, \\
&= x_2\, {x_3}^2\, y_4 - x_2\, {x_4}^2\, y_3 - {x_2}^2\, x_3\, y_4 + {x_2}^2\, x_4\, y_3 + y_2\, x_3\, {x_4}^2 - y_2\, x_4\, {x_3}^2 \\
&\quad - x_1\, {x_3}^2\, y_4 + x_1\, {x_4}^2\, y_3 + x_1\, {x_2}^2\, y_4 - x_1\, {x_2}^2\, y_3 - x_1\, y_2\, {x_4}^2 \\
&\quad + x_1\, y_2\, {x_3}^2 + {x_1}^2\, x_3\, y_4 - {x_1}^2\, x_4\, y_3 - {x_1}^2\, x_2\, y_4 + {x_1}^2\, x_2\, y_3 \\
&\quad + {x_1}^2\, y_2\, x_4 - {x_1}^2\, y_2\, x_3 - y_1\, x_3\, {x_4}^2 + y_1\, x_4\, {x_3}^2 + y_1\, x_2\, {x_4}^2 \\
&\quad - y_1\, x_2\, {x_3}^2 - y_1\, {x_2}^2\, x_4 + y_1\, {x_2}^2\, x_3.
\end{aligned}$$

Remarque: Pour simplifier la présentation, on désigne par

$$\mathcal{L}[P_1, P_2, \ldots, P_k] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n],$$

l'ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, de polynômes P_i, $1 \leq i \leq k$, en les variables $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$.

Définition 4.1.2 On définit, pour $\mu \vdash n$, l'espace

$$\mathbf{M}_\mu[X, Y] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n],$$

comme étant l'*ensemble des polynômes qui sont combinaisons linéaires (à coefficients rationnels) de dérivées partielles de* Δ_μ. On écrit:

$$\mathbf{M}_\mu[X, Y] := \mathcal{L}[\partial_X^p \partial_Y^q \Delta_\mu(X; Y)],$$

où $\partial_X^p = \partial_{x_1}^{p_1} \cdots \partial_{x_n}^{p_n}$, $\partial_Y^q = \partial_{y_1}^{q_1} \cdots \partial_{y_n}^{q_n}$, avec $\partial_X = \partial/\partial_X$.

Clairement $\mathbf{M}_\mu$ est de dimension finie, mais (comme on va le voir) il n'est pas facile de calculer explicitement cette dimension.

Remarque: Pour simplifier encore la notation on écrira

$$\mathcal{L}_\partial[P_1, P_2, \ldots, P_k],$$

pour l'ensemble des combinaisons linéaires de toutes les dérivées partielles de polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_k$, selon les variables x_i et y_i, $1 \leq i \leq n$.

Définition 4.1.3 On dit qu'un module $\mathcal{M}$ de $\mathbb{Q}[X,Y]$ est *∂-fermé* s'il est fermé pour les dérivées partielles par rapport aux x_i et aux y_i.

Clairement, tout module de la forme $\mathcal{L}_\partial[P_1, P_2, \ldots, P_k]$ est ∂-fermé. Réciproquement, tout module ∂-fermé de dimension fini est de la forme $\mathcal{L}_\partial[P_1, P_2, \ldots, P_k]$ pour certains polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Définition 4.1.4 Un élément $P(X,Y)$ d'un module $\mathcal{M} \subset \mathbb{Q}[X,Y]$, ∂-fermé, de dimension finie est dit *maximal* s'il ne peut s'obtenir par dérivation d'un autre élément de $\mathcal{M}$.

Comme toute combinaison linéaire d'éléments maximaux de $\mathcal{M}$ est un élément maximal de $\mathcal{M}$, l'ensemble de ces éléments maximaux forme un sous-espace dont on peut trouver une base. Posons $P_1, P_2, \ldots, P_k$, cette base. On a alors clairement

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}_\partial[P_1, P_2, \ldots, P_k].$$

Définition 4.1.5 L'action d'une permutation $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ sur le polynôme

$$P(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = P(X;Y),$$

appelée *action diagonale*, se définit comme suit:

$$\sigma P(X;Y) = P(\sigma X, \sigma Y),$$

avec $\sigma x_i = x_{\sigma(i)}$ et $\sigma y_i = y_{\sigma(i)}$.

Proposition 4.1.1 *Si $P(X,Y)$ est un polynôme maximal de $\mathcal{M}$, module invariant sous l'action diagonale, alors, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma \cdot P(X,Y)$ est aussi un polynôme maximal de $\mathcal{M}$.*

<u>Démonstration:</u>

En effet, supposons que $\sigma \cdot P(X,Y)$ n'est pas maximal. Par définition de maximal, on peut écrire:

$$\sigma \cdot P(X,Y) = Q(\partial X, \partial Y)P_1(X,Y),$$

où $P_1(X,Y) \in \mathcal{M}$ et $Q(\partial X, \partial Y)$ est un certain opérateur differentiel, et alors,

$$\begin{aligned} P(X,Y) &= \sigma^{-1}(Q(\partial X, \partial Y)P_1(X,Y)) \\ &= Q(\partial\sigma^{-1}X, \partial\sigma^{-1}Y)P_1(\sigma^{-1}X, \sigma^{-1}Y). \end{aligned}$$

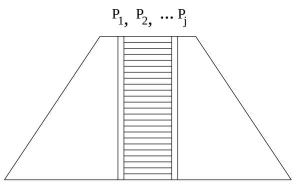
Comme $\mathcal{M}$ est invariant on a que

$$Q(\partial\sigma^{-1}X, \partial\sigma^{-1}Y)P_1(\sigma^{-1}X, \sigma^{-1}Y) \in \mathcal{M}.$$

On arrive donc à une contradiction, puisque $P(X,Y)$ doit être maximal.

☺

Définition 4.1.6 On appelle *pyramide* un module $\mathcal{M}$ de $\mathbb{Q}[X,Y]$, ∂-fermé, de dimension finie, dont les éléments maximaux ont tous le même degré total. Autrement dit, une pyramide (aztèque):



est un module $\mathcal{M}$ de $\mathbb{Q}[X,Y]$ pour lequel il existe une famille $\{P_1, P_2, \ldots, P_j\}$ de polynômes P_i, tous de degré k, telle que:

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}_\partial(\mathcal{S}_n \cdot \{P_1, P_2, \ldots, P_j\}).$$

L'ensemble $\{P_1, P_2, \ldots, P_j\}$ est alors dit *système de générateurs* pour la pyramide, et on dit de $\mathcal{L}(\mathcal{S}_n \cdot \{P_1, P_2, \ldots, P_j\})$ que c'est le *sommet* de $\mathcal{M}$.

Remarques:

- On peut toujours choisir un système de générateurs $\{P_1, P_2, \ldots, P_j\}$ qui soit tel que chaque orbite "$\mathcal{S}_n \cdot P_i$" soit irréductible. Un tel système est dit *pur* si, de plus, il est minimal.

- On appelle *cône* un module $\mathcal{M}$ qui satisfait toutes les conditions de la définition précédente et qui a un seul élément maximal. (À multiple scalaire près.)

Observation 4.1.1

$\mathbf{M}_\mu$ *est pyramidal.*

Ceci est clair puisqu'on a

$$\mathbf{M}_\mu := \mathcal{L}_\partial[\Delta_\mu],$$

qui est de dimension finie. De plus, $\mathbf{M}_\mu$ est ∂-fermé, par définition et $\{\Delta_\mu\}$ est bien évidemment un système pur de générateurs pour $\mathbf{M}_\mu$. Comme $\mathbf{M}_\mu$ a un unique générateur, c'est même un cône.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, les espaces $\mathbf{M}_\mu(X,Y)$ ont été introduits par Garsia-Haiman (Garsia - Haiman, 1993), en s'inspirant de résultats de Steinberg (Steinberg, 1964) correspondant au cas où $\mu = (n)$ (ou $\mu = 1^n$), dans le but d'obtenir des résultats "à la Steinberg" qui montreraient la conjecture de Macdonald. (Conjecture 2.2.1). À la suite de leurs travaux, il ressort que toute la question se réduit à la conjecture suivante connue sous le nom de *conjecture $n!$*:

Conjecture 4.1.1 (*Garsia et Haiman*)

$$\dim(\mathbf{M}_\mu) = n!\,.$$

Remarque: Il est prouvé dans (Garsia - Haiman, 1995) que pour tout μ, $\dim(\mathbf{M}_\mu) \leq n!$. Il suffit donc de montrer que $\dim(\mathbf{M}_\mu) \geq n!$ et ceci a été démontré pour certains cas particuliers comme les équerres et les diagrammes à 2 lignes (ou 2 colonnes). Un autre cas particulier, celui des "équerres avec un coin", c'est-à-dire les partages de la forme $\mu = (k, 2, 1^j)$, a été démontré par E. Reiner dans sa thèse de doctorat. De plus, nous avons revérifié cette conjecture, via l'ordinateur, pour tous les partages de n, $n \leq 7$.

Puisque $\sigma\Delta_\mu = \mathrm{sgn}(\sigma)\Delta_\mu$, l'espace $\mathbf{M}_\mu$ est invariant sous l'action diagonale. $\mathbf{M}_\mu$ est donc un $\mathcal{S}_n$-module et les résultats connus ainsi que des calculs explicites pour n assez petit suggèrent que la conjecture 4.1.1 peut se raffiner comme suit:

Conjecture 4.1.2 (*Garsia et Haiman*)

$\mathbf{M}_\mu$ est isomorphe à la représentation régulière de $\mathcal{S}_n$.

Remarque: Haiman a montré que la conjecture 4.1.2 est équivalente à la conjecture 4.1.1 (apparemment plus faible).

Le cas $\mu = (n)$, (ou $\mu = 1^n$), découle des résultats de Steinberg, (Steinberg, 1964), qui montre en fait qu'en tenant compte du degré en x, on a une graduation de $\mathbf{M}_{(n)}$ en composantes homogènes $\mathcal{S}_n$-invariantes,

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{M}^0_{(n)} \oplus \mathbf{M}^1_{(n)} \oplus \cdots \mathbf{M}^{\binom{n}{2}}_{(n)},$$

de degré au plus $\binom{n}{2}$, dont la dimension graduée:

$$\dim(\mathbf{M}_{(n)})(q) = \dim(\mathbf{M}^0_{(n)}) + \dim(\mathbf{M}^1_{(n)})q + \cdots + \dim(\mathbf{M}^{\binom{n}{2}}_{(n)})q^{\binom{n}{2}}$$

est

$$\dim(\mathbf{M}_{(n)})(q) = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}),$$

qui est le q-analogue classique de $n!$. De plus, la transformée de Frobenius du caractère gradué,

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}_{(n)})(q) = \sum_i \mathcal{F}(\mathbf{M}_{(n)}^{(i)})q^i,$$

s'écrit en terme des fonctions de Schur comme:

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}_{(n)})(q) = \sum_{\lambda \vdash n} K_{(n),\lambda}(q) s_\lambda, \tag{1}$$

où les $K_{(n),\lambda}(q)$ sont des polynômes de Kostka-Foulkes (Macdonald, 1995). Cette construction a été généralisée par Garsia-Procesi (Garsia - Procesi, 1992) pour fournir, dans un contexte analogue, un modèle pour les polynômes de Kostka-Foulkes en général et le résultat analogue fait intervenir les modules $\mathbf{M}_\mu(X)$ du chapitre 3. (Voir aussi ci-dessous pour les travaux de Lascoux et Schützenberger.)

Ce résultat suggère d'introduire une *bigraduation* sur les espaces $\mathbf{M}_\mu(X, Y)$, pour obtenir un résultat semblable à (1) pour les polynômes q,t-Kostka. Mais avant de définir ce bidegré, on introduit ici une petite parenthèse pour rappeler une interprétation combinatoire des polynômes $K_{\lambda\mu}(q)$. Elle apparaît potentiellement pour la première fois dans (Foulkes, 1974) comme conjecture sous la forme:

Conjecture 4.1.3 *(Foulkes, 1974)* (*Démontrée par Lascoux-Schützenberger en 1978.*) *Pour chaque T, tableau semi-standard de forme λ et de contenu μ, il existe un nombre positif $c(T)$ tel que*

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_T q^{c(T)}. \tag{2}$$

(*On "q-compte" les tableaux semi-standards.*)

Lascoux et Schützenberger ont trouvé un $c(T)$, appelé *charge du tableau* T, qui satisfait à l'équation (2) et qui est définit comme suit (voir (Lascoux, Schützenberger, 1978)): On considère $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ une suite d'entiers positifs (on dit aussi un *mot*). Le *poids* de w est la suite $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ où μ_i est le nombre de a_j de valeur i. Nous allons supposer, (nous verrons pourquoi dans un instant), que μ est un partage, c'est-à-dire que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$. Si $\mu = 1^n$ alors on dit que μ est un *mot standard.* Maintenant, pour trouver la charge d'un certain tableau T, on procède comme suit:

- Au tableau semi-standard, T, on associe le mot, $w(T)$, obtenu en lisant les entrées des lignes du tableau de droite à gauche en commençant par la ligne du bas. On posera

$$c(T) = c(w(T)),$$

où $c(w)$ est défini ci-après.

- Pour associer une charge à un mot w, il y a deux cas à considérer:

1^er^ cas: w est un mot standard.

À chaque élément (ou lettre) de w on associe un indice de la façon suivante:

  - Au nombre 1, on associe l'indice 0.
  - Si r a indice i alors, si $r+1$ est placé à droite de r il a aussi indice i, sinon il a indice $i+1$.

La *charge de* w, $c(w)$, est alors définie comme la somme de ces indices.

Exemple 4.1.2 Si $w = 32154$ alors $c(w) = 8$ car:

$$\begin{array}{lcccccc} w & = & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ \text{indices} & = & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

2^ième^ cas: w est un mot quelconque.

Il faut alors "décomposer" w en sous-mots standards. Pour ce faire, on commence par lire w, (de gauche à droite), et on choisit le premier 1 apparaissant dans w. On choisit ensuite le premier 2 à droite de ce 1 et ainsi de suite. Lorsqu'il n'y a plus de $r+1$ à la droite d'un r, on recommence au début du mot w. On a alors trouvé un sous-mot, w_1, qui est standard. On "efface" alors ce mot de w et on recommence le processus pour trouver un autre sous-mot standard, w_2 et ainsi de suite. La charge de w est alors définie comme la somme des charges des sous-mots standards:

$$c(w) = \sum_i c(w_i).$$

Pour éclairer tout cela, étudions un exemple en détails:

Exemple 4.1.3 Soit T, le tableau semi-standard suivant:

$$T := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Le mot $w(T)$ est alors,

$$w(T) = 3211143254.$$

En suivant le processus décrit plus haut on obtient:

$$\begin{array}{rcl} & w & = & \underline{3}\ \ 2\ \ \underline{1}\ \ 1\ \ 1\ \ \underline{4}\ \ 3\ \ \underline{2}\ \ \underline{5}\ \ 4 \\ \\ \Rightarrow & w_1 & = & 3\ \ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 5 \\ & \text{indices} & = & 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1 \\ \\ & w - w_1 & = & \underline{2}\ \ \underline{1}\ \ 1\ \ \underline{3}\ \ \underline{4} \\ \\ \Rightarrow & w_2 & = & 2\ \ 1\ \ 3\ \ 4 \\ & \text{indices} & = & 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1 \\ \Rightarrow & w_3 & = & 1 \\ & \text{indice} & = & 0 \end{array}$$

Comme $c(w) = \sum_i c(w_i)$, on a

$$c(w) = c(w_1) + c(w_2) + c(w_3) = 3 + 3 + 0 = 6.$$

Ceci met fin à notre petite parenthèse. Passons maintenant à la bigraduation des espaces $\mathbf{M}_\mu(X,Y)$:

Définition 4.1.7 Un monôme est dit de *bidegré* (h,k) si son degré total en x est h et son degré total en y est k.

Exemple 4.1.4

1. ${x_1}^2x_3{y_1}^2$ est de bidegré $(3,2)$,
2. $x_1x_2{x_4}^2y_1{y_2}^2{y_3}^2$ est de bidegré $(4,5)$,
3. x^2 est de bidegré $(2,0)$.

Définition 4.1.8 Un polynôme est dit *bihomogène* de bidegré (h,k), si tous les monômes qui le composent sont de bidegré (h,k).

Exemple 4.1.5

1. ${x_1}^2{y_1}^2 + x_1x_2{y_2}^2 + x_3x_4y_1y_2 + {x_1}^2y_1y_3$ est bihomogène de bidegré $(2,2)$,
2. $x_1x_2{y_2}^2 + {x_1}^2y_1 + {x_1}^2{y_2}^2$ n'est pas bihomogène.

Observation 4.1.2 *Δ_μ est bihomogène de degré $n(\mu')$ en x et $n(\mu)$ en y, c'est-à-dire de bidegré $(n(\mu'),n(\mu))$.*

Définition 4.1.9 Soit $P(X,Y)$, un polynôme. On désigne par $\Pi_{h,k}(P(X,Y))$, la *composante bihomogène* de bidegré (h,k) de $P(X,Y)$, à savoir la somme de tous les termes de bidegré (h,k) dans $P(X,Y)$. Donc, si

$$P = \Pi_{h,k}(P),$$

alors P est bihomogène de bidegré (h,k).

Lemme 4.1.1 *On peut décomposer* $\mathbf{M}_\mu$ *en somme directe de sous-espaces bihomogènes:*

$$\mathbf{M}_\mu = \bigoplus_{h=0}^{n(\mu')} \bigoplus_{k=0}^{n(\mu)} \mathbf{M}_\mu^{(h,k)},$$

où $\mathbf{M}_\mu^{(h,k)} = \Pi_{h,k}(\mathbf{M}_\mu)$.

Démonstration:

Il faut voir que

$$P \in \mathbf{M}_\mu \Rightarrow \Pi_{h,k}(P) \in \mathbf{M}_\mu.$$

Mais,

$$P \in \mathbf{M}_\mu \Leftrightarrow P = \sum_{p,q} a_{pq} \partial x^p \partial y^q \Delta_\mu,$$

où $|\, p \,| = \sum p_i$ et $|\, q \,| = \sum q_i$. De plus, comme Δ_μ est bihomogène de bidegré $(n(\mu'), n(\mu))$, on a que $\partial x^p \partial y^q \Delta_\mu$ est bihomogène de bidegré $(n(\mu') - \sum p_i,$ $n(\mu) - \sum q_i)$. On peut donc conclure que

$$\Pi_{h,k}(P) = \sum_{\substack{p,q \\ |p|=n(\mu')-h \\ |q|=n(\mu)-k}} a_{pq} \partial x^p \partial y^q \Delta_\mu \in \mathbf{M}_\mu. \qquad ☺$$

Remarque: Comme l'action diagonale préserve le bidegré, chaque sous-espace $\mathbf{M}_\mu^{(h,k)}$ est $\mathcal{S}_n$-invariant.

Définition 4.1.10 La fonction génératrice des caractères des composantes bihomogènes, *le caractère bigradué* de $\mathbf{M}_\mu$, est définie de la façon suivante:

$$\chi^{\mathbf{M}_\mu}(q,t) = \sum_{h=o}^{n(\mu')} \sum_{k=o}^{n(\mu)} t^h q^k char \mathbf{M}_\mu^{(h,k)}.$$

Définition 4.1.11 (Rappel) À une représentation ρ de $\mathcal{S}_n$ on peut associer une fonction symétrique $\mathcal{F}(\rho)$, appelé *l'image de Frobenius* de ρ, comme suit:

$$\mathcal{F}(\rho) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi^\rho(\sigma; q, t) p_{\lambda(\sigma)},$$

où $\lambda(\sigma)$ est le partage associé à σ et où $\chi^\rho(\sigma; q,t)$ dénote la valeur de $\chi^\rho(q,t)$ en σ.

On peut donc considérer,

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}_\mu) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi^{\mathbf{M}_\mu}(\sigma; q,t)\, p_{\lambda(\sigma)}.$$

Tous les résultats connus et les expérimentations suggèrent que:

Conjecture 4.1.4 (*Garsia et Haiman*)

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}_\mu) = \widetilde{H}_\mu(X; q,t) = \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(X) \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t),$$

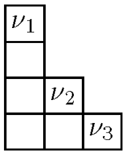
où les $\widetilde{H}_\mu(X; q,t)$ sont les polynômes de Macdonald renormalisés que nous avons introduit au chapitre 2.

Remarques:

- La conjecture coïncide avec le résultat de Steinberg lorsque $\mu = (n)$ (ou $\mu = 1^n$).
- Elle a été vérifiée, par ordinateur, au moins pour $n \leq 7$ et nous avons refait cette vérification avec nos propres programmes.
- Clairement, cette conjecture implique celle de Macdonald. (Les $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t)$ sont les coefficients de s_λ dans $\mathcal{F}(\mathbf{M}_\mu)$ comme cela correspond à l'énumération de multiplicités bigraduées, la positivité est évidente.)
- On peut montrer que lorsqu'on fait la substitution $y_i = 0$, $1 \leq i \leq |\mu|$, dans $\mathbf{M}_\mu(X,Y)$, alors le sous-espace correspondant coïncide avec l'espace $\mathbf{M}_\mu(X)$. Cela correspond à poser $t = 0$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{M}_\mu(X,Y))$ et ceci coïncide alors avec les résultats de Garsia-Procesi. (Garsia - Procesi, 1992)
- Haiman a montré que 4.1.4 est équivalent à 4.1.1.

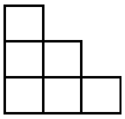
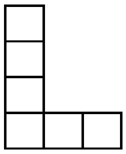
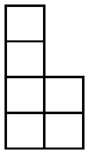
4.2 Intersections d'espaces

Définition 4.2.1 On dit que le partage ν est *couvert par le partage* μ, noté $\nu \to \mu$, si ν est obtenu de μ en lui enlevant un coin. Par exemple, si $\mu = 3211$



,

alors,

$\nu_1 = 321 =$  , $\nu_2 = 3111 =$  , $\nu_3 = 2211 =$  ,

où ν_i est le partage obtenu de μ en lui enlevant le coin i. (Numérotés de haut en bas).

Définition 4.2.2 Soit μ un partage à m coins. On note $\pi(\mu)$ l'ensemble des *prédécesseurs* de μ.

$$\pi(\mu) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m\},$$

où ν_i est le partage obtenu en enlevant le $i^{\text{ième}}$ coin (de haut en bas).

Pour $A \subseteq \pi(\mu)$, nous allons étudier les espaces

$$\mathbf{M}_A := \bigcap_{\nu \in A} \mathbf{M}_\nu.$$

Dans un premier temps, nous allons trouver explicitement des bases de ces intersections pour les cas où μ est "petit". Nous allons ensuite comparer l'image de Frobenius de la représentation en question à celle prédite par une conjecture de Bergeron-Garsia (Bergeron F. - Garsia, 1997). Tous ces calculs se font via l'ordinateur avec le logiciel MapleV (voir l'appendice pour la description des procédures). Ces considérations nous mèneront à des résultats et des conjectures nouvelles.

En première approximation, on a la conjecture suivante sur la dimension de ces intersections:

Conjecture 4.2.1 (*Bergeron F. et Garsia A.*)
Soit $A \subseteq \pi(\mu)$, avec $|A| = k$, alors,

$$\dim(\mathbf{M}_A) := \dim\left(\bigcap_{\nu \in A} \mathbf{M}_\nu\right) = \frac{n!}{k}.$$

Afin d'introduire notre approche, voici quelques calculs explicites de bases d'intersections. Nous allons voir que ces calculs confirment cette dernière conjecture.

Remarque: Il est judicieux de remarquer ici qu'on obtient les polynômes de l'espace $\mathbf{M}_{\mu'}$ en échangeant les variables x_i et y_i dans les polynômes de l'espace $\mathbf{M}_\mu$. (Il est facile de vérifier que cette opération envoie Δ_μ sur $\Delta_{\mu'}$). On a, par exemple, $\Delta_{211}(X, Y) = \Delta_{31}(Y, X)$.

Exemple 4.2.1 Soit $\mu = 21$ alors $\mathbf{M}_{2}$ est l'espace des combinaisons linéaires de:

- $x_2 - x_1$ $(= \Delta_{2})$ et de
- 1 $(= \partial_{x_2}\Delta_{2} = \text{-}\partial_{x_1}\Delta_{2})$,

et $\mathbf{M}_{11}$ est l'espace des combinaisons linéaires de:

- $y_2 - y_1$ $(= \Delta_{11})$ et de
- 1 $(= \partial_{y_2}\Delta_{11} = -\partial_{y_1}\Delta_{11})$.

Après examen des composantes bihomogènes respectives de ces bases, on trouve facilement que:

$$\mathbf{M}_{2} \cap \mathbf{M}_{11} = \mathcal{L}[1].$$

Pour les partages plus grands il est plus raisonnable de ne donner qu'une base (plutôt que tous les polynômes obtenus par dérivation) pour chaque bidegré présent dans l'intersection.

Exemple 4.2.2 Pour $\mu = 31$, on veut calculer

$$\bigcap_{\nu \to {\substack{\square\\ \square\square\square}}} \mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\square\square\square} \cap \mathbf{M}_{\substack{\square\\ \square\square}}.$$

Construisons une base pour chaque composante bihomogène de bidegré (h, k):

<u>$1^{ère}$ étape:</u> **Calcul de $\mathbf{M}_{\square\square\square}$.**

Le bidegré maximal de composantes de $\mathbf{M}_{\square\square\square}$ est $(3, 0)$. On a:

Base de bidegré (3,0): $\{\Delta_{\square\square\square}\}$, avec

- $\Delta_{\square\square\square} = x_2\, x_3{}^2 - x_3\, x_2{}^2 - x_1\, x_3{}^2 + x_1\, x_2{}^2 + x_1{}^2\, x_3 - x_1{}^2\, x_2.$

Base de bidegré (2,0): $\{\partial x_1 \Delta_{\square\square\square}, \partial x_2 \Delta_{\square\square\square}\}$, avec

- $\partial_{x_1} \Delta_{\square\square\square} = -x_3{}^2 + x_2{}^2 + 2\, x_1\, x_3 - 2\, x_1\, x_2$ et
- $\partial_{x_2} \Delta_{\square\square\square} = x_3{}^2 - 2\, x_3\, x_2 + 2\, x_1\, x_2 - x_1{}^2.$

Base de bidegré (1,0): $\{\partial x_1 \partial x_2 \Delta_{\square\square\square}, \partial x_1 \partial x_3 \Delta_{\square\square\square}\}$, avec

- $\partial_{x_1} \partial_{x_2} \Delta_{\square\square\square} = 2\, x_2 - 2\, x_1$ et
- $\partial_{x_1} \partial_{x_3} \Delta_{\square\square\square} = -2\, x_3 + 2\, x_1.$

Base de bidegré (0,0): $\{1\}$, puisque

- $1/2\ \partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 \Delta_{\square\square\square} = 1.$

<u>$2^{ième}$ étape:</u> **Calcul de $\mathbf{M}_{\substack{\square\\ \square\square}}$.**

Le bidegré maximal est dans ce cas, $(1, 1)$. On trouve:

Base de bidegré (1,1): $\{\Delta_{\substack{\square\\ \square\square}}\}$, avec

- $\Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = x_2\, y_3 - x_3\, y_2 - x_1\, y_3 + x_1\, y_2 + y_1\, x_3 - y_1\, x_2$.

Base de bidegré (1,0): $\{\partial_{y_2} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}}, \partial_{y_3} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}}\}$, avec

- $\partial_{y_2} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = -x_3 + x_1$ et
- $\partial_{y_3} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = x_2 - x_1$.

Base de bidegré (0,1): $\{\partial_{x_2} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}}, \partial_{x_3} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}}\}$, avec

- $\partial_{x_2} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = y_3 - y_1$ et
- $\partial_{x_3} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = -y_2 + y_1$.

Base de bidegré (0,0): $\{1\}$, puisque

- $\partial_{x_2} \partial_{y_3} \Delta_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = 1$.

Un examen des composantes bihomogènes respectives de ces espaces montre que les seules composantes pouvant apparaître dans l'intersection sont de bidegré $(1, 0)$ ou $(0, 0)$. On obtient facilement que:

$$\mathbf{M}_{\square\square\square} \cap \mathbf{M}_{\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square\end{smallmatrix}} = \mathcal{L}[x_2 - x_1, x_3 - x_1, 1].$$

On observe que ce module est pyramidal et que son sommet est engendré par l'orbite de $x_2 - x_1$.

Comme nous allons le voir, tous les exemples étudiés sont en fait pyramidaux et, dorénavant nous n'en donnons que le sommet.

Remarque: On obtient une base de l'intersection de deux espaces $V = \mathcal{L}[v_1, \ldots, v_n]$ et $W = \mathcal{L}[w_1, \cdots, w_k]$ en trouvant l'ensemble

$$\{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid \text{il existe } b_1, \ldots, b_k \text{ avec } a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 w_1 + \cdots + b_k w_k\}.$$

Ceci correspond à résoudre un système d'équations linéaires, et la fonction `intbasis` de MapleV fait ce travail.

Voici une table donnant pour certaines intersections les éléments qui génèrent leur sommet respectif. Dans ce tableau, $\Delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ indique qu'on considère Δ_μ en les variables d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Comme on l'a mentionné plus tôt, on retrouve l'intersection de $\mathbf{M}_{\nu_1}$ et $\mathbf{M}_{\nu_2}$ en considérant:

$$\mathbf{M}_{\nu_1} \cap \mathbf{M}_{\nu_2} = \mathcal{L}_\partial \left[\mathcal{S}_n \cdot [\text{générateurs du sommet}]\right].$$

INTERSECTION	GÉNÉRATEUR(S) DU SOMMET
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,2)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,1)}(1,2)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,3)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(4)}$	$\Delta_{\tiny\yng(3)}(1,2,3)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,3)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(2,2)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,2)}(1,2,3)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(2)}(1,2)\Delta_{\tiny\yng(2)}(3,4)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,3)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,2)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,2)}(1,2,3)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(2)}(1,2)\Delta_{\tiny\yng(1,1)}(3,4)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,2)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,1,1)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,1,1)}(1,2,3)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(5)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,4)}$	$\Delta_{\tiny\yng(4)}(1,2,3,4)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,4)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(2,3)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,3)}(1,2,3,4)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(2)}(1,2)\Delta_{\tiny\yng(3)}(3,4,5)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,4)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,3)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,3)}(1,2,3,4)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(3)}(1,2,3)\Delta_{\tiny\yng(1,1)}(4,5)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(2,3)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,2,2)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,3)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,2)}(1,2,3)\Delta_{\tiny\yng(2)}(4,5)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(1,2)}(1,2,3)\Delta_{\tiny\yng(1,1)}(4,5)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,3)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,1,2)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,1,2)}(1,2,3,4)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(2)}(1,2)\Delta_{\tiny\yng(1,1,1)}(3,4,5)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,2,2)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,1,2)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,1,2)}(1,2,3,4)\,,\, \Delta_{\tiny\yng(1,1,1)}(1,2,3)\Delta_{\tiny\yng(1,1)}(4,5)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,1,2)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,1,1,1)}$	$\Delta_{\tiny\yng(1,1,1,1)}(1,2,3,4)$
$\mathbf{M}_{\tiny\yng(1,2,3)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(1,1,4)} \cap \mathbf{M}_{\tiny\yng(2,4)}$	$\Delta_{\tiny\yng(3)}(1,2,3)\Delta_{\tiny\yng(1,2)}(4,5,6), \Delta_{\tiny\yng(1,3)}(1,2,3,4)\Delta_{\tiny\yng(2)}(5,6),$ $\Delta_{\tiny\yng(1,3)}(1,2,3,4)\Delta_{\tiny\yng(1,1)}(5,6)$

Figure 4.1: Intersections et sommets associés

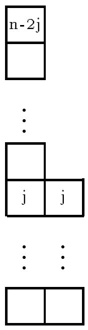
L'intersection $\mathbf{M}_A$ est clairement ∂-fermée. En examinant plusieurs cas, on observe que les éléments maximaux de l'intersection ont tous le même degré total!! Ce degré, le *degré total maximal*, est dénoté d_A. On est donc mené, modulo d'autres observations, à affirmer que:

Conjecture 4.2.2 *Pour tout $A \subset \pi(\mu)$, $\mathbf{M}_A$ est pyramidal et les caractéristiques de Frobenius des composantes irréductibles du sommet de $\mathbf{M}_A$ sont toutes de la forme $s_{2^j 1^{n-2j}}$.*

Autrement dit,

$$\mathbf{M}_A = \bigcap_{\nu \in A} \mathbf{M}_\nu = \mathcal{L}_\partial[\mathcal{S}_n \cdot a_A],$$

admet un système pur, a_A, de générateurs tel que pour $P \in a_A$, la transformée de Frobenius du caractère de la composante irréductible $\mathcal{S}_n \cdot P$ est une fonction de Schur indexée par un partage de la forme $2^j 1^{n-2j}$:



.

Cette conjecture caractérise donc le type de composantes isotypiques qui peuvent apparaître dans le sommet de $\mathbf{M}_A$. En l'alliant à une conjecture de F. Bergeron et A. Garsia sur le caractère bigradué de $\mathbf{M}_A$, nous allons voir qu'il est possible de circonscrire la nature des éléments cycliques (éléments engendrant une orbite irréductible) du sommet de $\mathbf{M}_A$.

Nous allons d'abord rappeler les travaux de Bergeron-Garsia sur le caractère bigradué de $\mathbf{M}_A$ (section 4.2.1). Ensuite, nous allons donner de nouvelles formules pour l'énumération bigraduée des composantes isotypiques de $\mathbf{M}_A$, et en particulier, pour celles de degré total maximal (section 4.2.2). Enfin, nous allons construire explicitement des éléments cycliques pour chacune de ces composantes (section 4.2.3).

4.2.1 Caractère bigradué de $\mathbf{M}_A$

Pour mieux appréhender cette partie de notre développement, considérons le cas où μ a au moins trois coins. Il existe donc 3 partages couverts par μ:

$$\alpha, \beta, \gamma \to \mu$$

La conjecture de F. Bergeron et A. Garsia entraîne qu'il existe certaines fonctions symétriques $\Phi_\mu^{(1)}, \Phi_\mu^{(2)}, \Phi_\mu^{(3)}$, *Schur-positives*, telles que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_\alpha &= \Phi_\mu^{(3)} + \left(\frac{1}{T_\beta} + \frac{1}{T_\gamma}\right)\Phi_\mu^{(2)} + \frac{1}{T_\beta T_\gamma}\Phi_\mu^{(1)}, \\
\widetilde{H}_\beta &= \Phi_\mu^{(3)} + \left(\frac{1}{T_\alpha} + \frac{1}{T_\gamma}\right)\Phi_\mu^{(2)} + \frac{1}{T_\alpha T_\gamma}\Phi_\mu^{(1)}, \\
\widetilde{H}_\gamma &= \Phi_\mu^{(3)} + \left(\frac{1}{T_\alpha} + \frac{1}{T_\beta}\right)\Phi_\mu^{(2)} + \frac{1}{T_\alpha T_\beta}\Phi_\mu^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Rappelons que $T_\alpha = T_\alpha(q,t) = q^{n(\alpha')}t^{n(\alpha)}$ et la Schur-positivité signifie que

$$\Phi_\mu^{(i)} = \sum_{\lambda \vdash n} \Phi_{\mu\lambda}^{(i)}(q,t) s_\lambda, \tag{4}$$

avec $\Phi_{\mu\lambda}^{(i)}(q,t) \in \mathbb{N}[q,t]$. Ceci se généralise au cas où μ a au moins m coins. Il est clair qu'on peut calculer les $\Phi_\mu^{(i)}$ à l'aide des tables de $\widetilde{H}_\mu$, en résolvant le système d'équations (3). Dans le cas général, on obtient:

$$\Phi_A^{(i)} = \sum_{\nu \in A} (T_\nu)^{m-i}\, \widetilde{H}_\nu \prod_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq \nu}} \frac{1}{1 - T_\nu / T_\alpha}. \tag{5}$$

Nous allons considérer (5) comme une définition des $\Phi_A^{(i)}$ (modulo les travaux de Bergeron-Garsia.) La conjecture de ces auteurs implique, entre autre que:

Conjecture 4.2.3 (*Bergeron-Garsia*)

Pour tout μ *et tout* $A \in \pi(\mu)$*, on a*

$$\Phi_A = \mathcal{F}(\mathbf{M}_A) := \mathcal{F}\left(\bigcap_{\nu \in A} \mathbf{M}_\nu\right), \tag{6}$$

où $\Phi_A := \Phi_A^{(m)}$*,* $m = | A |$ *.*

Exemple 4.2.3 Voici quelques tables de Φ_A. Observons que lorsque $A = \{\nu\}$, alors $\Phi_A = \widetilde{H}_\nu$, ce qui rend ce cas sans intérêt pour nous. Pour μ tel que $|\pi(\mu)| = 2$, le seul cas non trivial de sous-ensemble de $\pi(\mu)$ est $A = \pi(\mu)$. Il s'ensuit que pour tout partage de $n \leq 6$, il suffit de donner les tables pour $\Phi_\mu = \Phi_{\pi(\mu)}$, étant donné que le plus petit partage à trois coins est $\mu = 321$, et on complète ces tables par la donnée de $\Phi_{\{311,32\}}$, $\Phi_{\{311,221\}}$ et $\Phi_{\{32,221\}}$:

- Pour $\mu \vdash 3$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s_2 & s_{11} \end{array} \\ \begin{array}{c} \Phi_3 \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{111} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & q \\ 1 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix} \end{array}$$

- Pour $\mu \vdash 4$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_3 & s_{21} & s_{1^3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \Phi_4 \\ \Phi_{31} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{211} \\ \Phi_{1^4} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & q^2+q & q^3 \\ 1 & q & 0 \\ 1 & q+t & qt \\ 1 & t & 0 \\ 1 & t^2+t & t^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

• Pour $\mu \vdash 5$:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} s_4 & s_{31} & s_{22} & s_{211} & s_{1^4} \end{array} \\
\begin{array}{c} \Phi_5 \\ \Phi_{41} \\ \Phi_{32} \\ \Phi_{311} \\ \Phi_{221} \\ \Phi_{21^3} \\ \Phi_{1^5} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & q^3+q^2+q & q^4+q^2 & q^5+q^4+q^3 & q^6 \\
1 & q^2+q & q^2 & q^3 & 0 \\
1 & q+t & q^2 & qt & 0 \\
1 & q+t & qt & qt & 0 \\
1 & q+t & t^2 & qt & 0 \\
1 & t^2+t & t^2 & t^3 & 0 \\
1 & t^3+t^2+t & t^4+t^2 & t^5+t^4+t^3 & t^6
\end{bmatrix}
\end{array}$$

• Pour $\mu \vdash 6$:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} s_5 & s_{41} & s_{32} & s_{311} \end{array} \\
\begin{array}{c} \Phi_6 \\ \Phi_{51} \\ \Phi_{42} \\ \Phi_{411} \\ \Phi_{33} \\ \Phi_{321} \\ \Phi_{31^3} \\ \Phi_{2^3} \\ \Phi_{2^21^2} \\ \Phi_{21^4} \\ \Phi_{1^6} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & q^4+q^3+q^2+q & q^6+q^5+q^4+q^3+q^2 & q^7+q^6+2\,q^5+q^4+q^3 \\
1 & q^3+q^2+q & q^4+q^3+q^2 & q^5+q^4+q^3 \\
1 & q^2+q+t & q^3+q^2+qt & q^3+q^2\,t+qt \\
1 & q^2+q+t & q^2+q^2\,t+qt & q^3+q^2\,t+qt \\
1 & q^2+q+qt+t & q^3+q^2+q^2\,t+q\,t+t^2 & q^3+q^3\,t+2\,q^2\,t+qt^2+qt \\
1 & q+t & q^2+q\,t+t^2 & qt \\
1 & q+t^2+t & q\,t^2+qt+t^2 & q\,t^2+qt+t^3 \\
1 & q+qt+t^2+t & q^2+q\,t^2+q\,t+t^3+t^2 & q^2t+qt^3+2\,q\,t^2+qt+t^3 \\
1 & q+t^2+t & qt+t^3+t^2 & q\,t^2+qt+t^3 \\
1 & t^3+t^2+t & t^4+t^3+t^2 & t^5+t^4+t^3 \\
1 & t^4+t^3+t^2+t & t^6+t^5+t^4+t^3+t^2 & t^7+t^6+2\,t^5+t^4+t^3
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \Phi_{6} \\ \Phi_{51} \\ \Phi_{42} \\ \Phi_{411} \\ \Phi_{33} \\ \Phi_{321} \\ \Phi_{31^3} \\ \Phi_{2^3} \\ \Phi_{2^21^2} \\ \Phi_{21^4} \\ \Phi_{1^6} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad s_{221} \quad & \quad s_{21^3} \quad & s_{1^5} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc}
q^8+q^7+q^6+q^5+q^4 & q^9+q^8+q^7+q^6 & q^{10} \\
q^5+q^4 & q^6 & 0 \\
q^4+q^2\,t & q^3\,t & 0 \\
q^3\,t+q^2\,t & q^3\,t & 0 \\
q^4+q^3\,t+q^2\,t^2+q^2\,t+q\,t^2 & q^4\,t+q^3\,t^2+q^3\,t+q^2\,t^2 & q^4\,t^2 \\
q^2\,t+q\,t^2 & 0 & 0 \\
q\,t^3+q\,t^2 & q\,t^3 & 0 \\
q^2\,t^2+q^2\,t+q\,t^3+q\,t^2+t^4 & q^2\,t^3+q^2\,t^2+q\,t^4+q\,t^3 & q^2\,t^4 \\
q\,t^2+t^4 & q\,t^3 & 0 \\
t^5+t^4 & t^6 & 0 \\
t^8+t^7+t^6+t^5+t^4 & t^9+t^8+t^7+t^6 & t^{10}
\end{array}\right] \end{array}$$

• On complète cette dernière table par les trois valeurs suivantes, associées aux partages couverts par $\mu = 321$.

$$\Phi_{\{311,32\}} = q^4\,t^4\,s_{41} + q^4\,t^4(q+t)\,s_{311} + q^5\,t^5\,s_{2111},$$
$$\Phi_{\{311,221\}} = q^4\,t^4\,s_{41} + q^4\,t^4\,(q+t)\,s_{311} + q^5\,t^5\,s_{2111},$$
$$\Phi_{\{32,221\}} = q^4\,t^4\,s_{41} + q^4\,t^4\,(q+t)\,s_{311} + q^5\,t^5\,s_{2111}.$$

Figure 4.2: Tables de Φ_A pour $\mu \vdash n$, $n \leq 6$

Pour tout $A \subseteq \pi(\mu)$, avec $\mu \vdash n \leq 7$, des calculs explicites de $\mathcal{F}(\mathbf{M}_A)$ confirment le fait que $\mathcal{F}(\mathbf{M}_A) = \Phi_A$. Pour bien décrire l'intersection $\mathbf{M}_A$, on doit produire une famille $\mathfrak{a}_A$, d'éléments cycliques maximaux de $\mathbf{M}_A$, telle que:

1. $\mathcal{L}_\partial(\mathcal{S}_n \cdot \mathfrak{a}_A) = \mathbf{M}_A$,

2. il existe d_A tel que $\deg(P(X,Y)) = d_A$, pour chaque $P(X,Y) \in \mathfrak{a}_A$,

3. $\displaystyle\sum_{P \in \mathfrak{a}_A} q^{\deg_x(P)} t^{\deg_y(P)} \mathcal{F}(\mathcal{S}_n\, P) \;=\; \Psi(A),$

où (supposant la conjecture 4.2.3 de Bergeron-Garsia) Ψ_A est la composante de degré maximal de Φ_A. On calcule directement que:

$$\Psi_{\pi(21)} = s_2,$$
$$\Psi_{\pi(31)} = q\, s_{21}, \qquad \Psi_{\pi(32)} = q^2\, s_{2^2} + q\, t\, s_{21^2},$$
$$\Psi_{\pi(41)} = q^3\, s_{21^2}, \qquad \Psi_{\pi(42)} = q^4\, s_{2^21} + q^3\, t\, s_{21^3},$$
$$\Psi_{\pi(51)} = q^6\, s_{21^3}, \qquad \Psi_{\pi(52)} = q^7\, s_{2^21^2} + q^6\, t\, s_{21^4},$$
$$\Psi_{\pi(61)} = q^{10}\, s_{21^4}, \qquad \Psi_{\pi(62)} = q^{11}\, s_{2^21^3} + q^{10}\, t\, s_{21^5},$$
$$\Psi_{\pi(71)} = q^{15}\, s_{21^5}, \qquad \Psi_{\pi(72)} = q^{16}\, s_{2^21^4} + q^{15}\, t\, s_{21^6},$$
$$\Psi_{\pi(81)} = q^{21}\, s_{21^6},$$

$$\Psi_{\pi(31^2)} = q\, t\, s_{2^2} + q\, t\, s_{21^2},$$
$$\Psi_{\pi(41^2)} = q^3\, t\, s_{2^21} + q^3\, t\, s_{21^3},$$
$$\Psi_{\pi(51^2)} = q^6\, t\, s_{2^21^2} + q^6\, t\, s_{21^4},$$
$$\Psi_{\pi(61^2)} = q^{10}\, t\, s_{2^21^3} + q^{10}\, t\, s_{21^5},$$
$$\Psi_{\pi(71^2)} = q^{15}\, t\, s_{2^21^4} + q^{15}\, t\, s_{21^6},$$

$$\Psi_{\pi(43)} = q^6\, s_{2^3} + q^5\, t\, s_{2^21^2} + q^4\, t^2\, s_{21^4},$$
$$\Psi_{\pi(53)} = q^9\, s_{2^31} + q^8\, t\, s_{2^21^3} + q^7\, t^2\, s_{21^5},$$
$$\Psi_{\pi(63)} = q^{13}\, s_{2^31^2} + q^{12}\, t\, s_{2^21^4} + q^{11}\, t^2\, s_{21^6},$$

$$\Psi_{\pi(41^3)} = q^3\, t^3\, s_{2^3} + q^3\, t^3\, s_{2^21^2} + q^3\, t^3\, s_{21^4},$$
$$\Psi_{\pi(51^3)} = q^6\, t^3\, s_{2^31} + q^6\, t^3\, s_{2^21^3} + q^6\, t^3\, s_{21^5},$$
$$\Psi_{\pi(61^3)} = q^{10}\, t^3\, s_{2^31^2} + q^{10}\, t^3\, s_{2^21^4} + q^{10}\, t^3\, s_{21^6}.$$

$$\Psi_{\pi(321)} = (q+t)\, q\, t\, s_{2^21},$$
$$\Psi_{\pi(421)} = q^4\, t\, s_{2^3} + (q+t)\, q^3\, t\, s_{2^21^2},$$
$$\Psi_{\pi(521)} = q^7\, t\, s_{2^31} + (q+t)\, q^6\, t\, s_{2^21^3},$$
$$\Psi_{\pi(621)} = q^{11}\, t\, s_{2^31^2} + (q+t)\, q^{10}\, t\, s_{2^21^4},$$
$$\Psi_{\pi(721)} = q^{16}\, t\, s_{222111} + (q+t)\, q^{15}\, t\, s_{2211111},$$

$$\Psi_{\pi(431)} = (q+t)\, q^5\, t\, s_{2221} + (q+t)\, q^4\, t^2\, s_{22111},$$
$$\Psi_{\pi(531)} = q^9\, t\, s_{2222} + (q+t)\, q^8\, t\, s_{22211} + (q+t)\, q^7\, t^2\, s_{221111},$$
$$\Psi_{\pi(631)} = q^{13}\, t\, s_{22221} + (q+t)\, q^{12}\, t\, s_{222111} + (q+t)\, q^{11}\, t^2\, s_{2211111},$$

$$\Psi_{\pi(4211)} = (q+t)\, q^3\, t^3\, s_{2221} + (q+t)\, q^3\, t^3\, s_{22111},$$
$$\Psi_{\pi(5211)} = q^7\, t^3\, s_{2222} + (q+t)\, q^6\, t^3\, s_{22211} + (q+t)\, q^6\, t^3\, s_{221111},$$
$$\Psi_{\pi(6211)} = q^{13}\, t\, S_{22221} + (q+t)\, q^{12}\, t\, s_{222111} + (q+t)\, q^{11}\, t^2\, s_{2211111}.$$

ou encore:

$$\Psi_{\pi(4321)} = (q^3 + q^2 t + q t^2 + t^3)\, q^4 t^4\, s_{222111} + (q+t)\, q^5 t^5\, s_{22221}.$$

Remarque: Étant donné que $\widetilde{H}_{\mu'}(q,t) = \widetilde{H}_{\mu}(t,q)$ et qu'il en est de même pour les T_μ, on a

$$\Psi_{A'}(q,t) = \Psi_A(t,q),$$

où $A' = \{\nu' \mid \nu \in A\}$. Cela réduit évidemment le nombre de cas à considérer.

En observant les tables précédentes, on est amené à la conjecture suivante:

Conjecture 4.2.4 *Le degré maximal (en q et t) de Φ_A, est:*

$$d_A = \binom{m-1}{2} + \sum_{(p,q)\in\rho(A)} (p+q),$$

où $m = |A|$ et $\rho(A) = \bigcap_{\nu\in A} \nu$.

Il est intéressant de constater qu'on peut calculer facilement certains termes des Ψ_A. Par exemple, si on considère le cas $|A| = 2$, disons $A = \{\alpha,\beta\} \subseteq \pi(\mu)$ et $\mu \vdash n+1$, alors le coefficient de $s_{21^{n-2}}$ dans $\Psi_{\{\alpha,\beta\}}$ est

$$T_{\alpha\cap\beta} = \prod_{(a,b)\in\alpha\cap\beta} q^a t^b.$$

Pour voir cela, rappelons d'abord qu'il est facile de montrer, en utilisant la formule du déterminant de Jacobi-Trudi, que:

$$s_\lambda[1-u] = \begin{cases} (-u)^k(1-u), & \text{si } \lambda = (n-k, 1^k), \\ \\ 0, & \text{si } \lambda_2 \geq 2. \end{cases}$$

Or, Macdonald, (Macdonald, 1995), a montré essentiellement que

$$\widetilde{H}_\mu[1-u] = \prod_{(a,b)\in\mu} (1-q^a t^b u). \tag{7}$$

On peut donc calculer facilement $\Phi_A[1-u]$, pour $A = \{\alpha, \beta\}$, via (5) et (7):

$$\begin{aligned}
\Phi_A[1-u] &= \frac{T_\alpha \widetilde{H}_\beta[1-u] - T_\beta \widetilde{H}_\alpha[1-u]}{T_\alpha - T_\beta}, \\
&= \frac{T_\alpha \prod_{(a,b)\in\beta} (1-q^a t^b u) - T_\beta \prod_{(a,b)\in\alpha} (1-q^a t^b u)}{T_\alpha - T_\beta}, \\
&= \prod_{(a,b)\in\alpha\cap\beta} (1-q^a t^b u) \cdot \frac{T_\alpha(1-q^{a_1}t^{b_1}u) - T_\beta(1-q^{a_2}t^{b_2}u)}{T_\alpha - T_\beta}, \\
&= \prod_{(a,b)\in\alpha\cap\beta} (1-q^a t^b u)\,,
\end{aligned}$$

où, $q^{a_1}t^{b_1} = T_\mu/T_\alpha$ et $q^{a_2}t^{b_2} = T_\mu/T_\beta$. On a donc par (4) que

$$\begin{aligned}
\prod_{(a,b)\in\alpha\cap\beta} (1-q^a t^b u) &= \sum_{\lambda\vdash n} \Phi_{A,\lambda}(q,t) s_\lambda[1-u]\,, \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{A,(n-k,1^k)}(q,t)(1-u)(-u)^k\,.
\end{aligned}$$

Et on a donc montré que

Proposition 4.2.1

$$\Phi_{A,(n-k,1^k)}(q,t) = \textit{coefficient de } u^k \textit{ dans} \prod_{\substack{(a,b)\in\alpha\cap\beta \\ (a,b)\neq(0,0)}} (1+q^a t^b u).$$

☺

Lorsque $|A| = 2$, on a donc

$$\Phi_{A,21^{n-2}} = T_{\alpha\cap\beta}, \tag{8}$$

et un argument semblable permet de montrer que $\Phi_{A,21^{n-2}} = 0$ si $|A| > 2$. Plus généralement, en utilisant des formules de Garsia-Tesler (Garsia - Tesler, 1996) pour les q,t-Kostka et on va montrer que:

$$\begin{aligned}\Psi_A &= T_{\rho(A)} s_{21^{n-2}} + \text{autres termes}, \quad \text{si } |A| = 2,\\ \Psi_A &= T_{\rho(A)}(q+t) s_{221^{n-4}} + \text{autres termes}, \quad \text{si } |A| = 3,\end{aligned}$$

où $\rho(A) = \bigcap_{\nu \in A} \nu$.

4.2.2 Formules pour les composantes isotypiques de $\mathbf{M}_A$

Pour l'énumération bigraduée explicite plus générale des composantes isotypiques de $\mathbf{M}_A$, via Φ_A, nous devons d'abord rappeler une formule de Garsia-Tesler pour le calcul des $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) = \langle \widetilde{H}_\mu, s_\lambda \rangle$. Ceux-ci ont montré (Garsia - Tesler, 1996) que pour tout μ et λ, partages de n, il existe $\gamma \vdash k$, avec $\lambda = (n-k, \gamma)$ et une fonction symétrique κ_γ, avec coefficients dans $\mathbb{Z}[q,t,1/q,1/t]$ et de degré au plus k, tels que,

$$\kappa_\gamma[B_\mu] = \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t). \tag{9}$$

Ici, $\kappa_\gamma[B_\mu]$ dénote la λ-substitution de B_μ dans κ_γ, avec

$$B_\mu = B_\mu(q,t) = \sum_{c \in \mu} q^{a'(c)} t^{l'(c)}.$$

Voici quelques exemples de κ_γ:

$$\begin{aligned}
&\kappa_1 = s_1 - 1,\\
&\kappa_{1^j} = e_j[X-1],\\
&\kappa_2 = \frac{1}{qt}[(q+t)s_{11} - s_2 - (qt-1)s_1],\\
&\kappa_3 = \frac{1}{q^3t^3}[(q^2t^2 + q^3 + q^2t + qt^2 + t^3)s_{111} - (q^2 + qt + t^2)s_{21} + (q+t)s_3\\
&\qquad - (q^3t^2 + q^2t^3 - q^2t - q^2 - qt - qt^2 - t^2)s_{11} + (q^2t^2 - q - qt - t)s_2 - qt(qt-1)s_1].
\end{aligned}$$

Une façon récursive de calculer ces polynômes, donné par G.Tesler, est d'utiliser un opérateur ∇ (introduit par Bergeron-Garsia) défini par:

$$\nabla \widetilde{H}_\mu = T_\mu \widetilde{H}_\mu.$$

Proposition 4.2.2 (*Tesler*)

$$\kappa_\gamma[X;q,t] = \left(\nabla^{-1} \omega\, s_\gamma \left[\frac{X+1}{(1-t)(1-q)} - 1\right]\right)_{X \mapsto X(1-q)(1-t)-1}, \tag{10}$$

où ω est l'involution qui envoie s_λ sur s'_λ.

Exemple 4.2.4 Calculons κ_2:

$$\kappa_2[X;q,t] \;=\; \left(\nabla^{-1}\,\omega\, s_2\left[\frac{X+1}{(1-t)(1-q)}-1\right]\right)_{X\mapsto X(1-q)(1-t)-1}.$$

Remarquons premièrement qu'on a

$$\nabla^{-1}\widetilde{H}_\mu \;=\; \frac{1}{T_\mu}\widetilde{H}_\mu.$$

Pour faire notre calcul, on doit calculer l'effet de ∇^{-1} sur les Schurs indexés par des partages ≤ 2.

- $\nabla^{-1}\,1 \;=\; 1$, car $\widetilde{H}_0 = 1$ et $T_0 = 1$, où 0 dénote le partage vide.
- $\nabla^{-1}\,s_1 \;=\; s_1$. En effet, $\widetilde{H}_1 \;=\; \widetilde{K}_{11}s_1$ (voir conjecture 2.2.1) et $\widetilde{K}_{11} \;=\; \kappa_0[B_1] \;=1$ puisque $\kappa_0 = 1$. On a donc que $\widetilde{H}_1 = s_1$ et comme $T_1 = 1$, on a le résultat voulu.
- Calculons maintenant $\nabla^{-1}\,s_2$. Pour ce faire, il faut trouver comment exprimer s_2 dans la base des $\widetilde{H}$. Calculons donc $\widetilde{H}_2$ et $\widetilde{H}_{11}$.

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_2 \;&=\; \widetilde{K}_{2,2}\,s_2 \;+\; \widetilde{K}_{11,2}\,s_{11}\\ &=\; \kappa_0[B_2]s_2 \;+\; \kappa_1[B_2]s_{11}\\ &=\; s_2 \;+\; \kappa_1[B_2]s_{11}\,.\end{aligned}$$

Nous devons donc calculer d'abord κ_1:

$$\begin{aligned}\kappa_1 \;&=\; \left(\nabla^{-1}\,\omega\, s_1\left[\frac{X+1}{(1-t)(1-q)}-1\right]\right)_{X\mapsto X(1-q)(1-t)-1}\\ &=\; \left(\nabla^{-1}\,\omega\left(\frac{s_1+1}{(1-t)(1-q)}-1\right)\right)_{X\mapsto X(1-q)(1-t)-1}\\ &=\; \left(\nabla^{-1}\left(\frac{s_1}{(1-t)(1-q)}-\frac{(1-t)(1-q)-1}{(1-t)(1-q)}\right)\right)_{X\mapsto X(1-q)(1-t)-1}\\ &=\; \left(\frac{s_1}{(1-t)(1-q)}-\frac{(1-t)(1-q)-1}{(1-t)(1-q)}\right)_{X\mapsto X(1-q)(1-t)-1}\\ &=\; \frac{(1-t)(1-q)s_1\;-\;1\;-\;(1-t)(1-q)\;+\;1}{(1-t)(1-q)}\\ &=\; s_1\;-\;1.\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_2 &= s_2 + (s_1-1)[B_2]s_{11} \\ &= s_2 + (B_2-1)s_{11} \\ &= s_2 + qs_{11},\end{aligned}$$

puisque $B_2 = 1+q$. Par symétrie, $(\widetilde{H}_{\mu'}(q,t) = \widetilde{H}_\mu(t,q))$, on a

$$\widetilde{H}_{11} = s_2 + ts_{11}.$$

On peut donc écrire s_2 dans la base des $\widetilde{H}$ comme suit:

$$s_2 = \frac{t\,\widetilde{H}_2 - q\,\widetilde{H}_{11}}{t-q}.$$

Comme $T_2 = q$ et $T_{11} = t$, on a:

$$\begin{aligned}\nabla^{-1}\, s_2 &= \nabla^{-1}\left(\frac{t\,\widetilde{H}_2 - q\,\widetilde{H}_{11}}{t-q}\right) \\ &= \frac{t/q\,\widetilde{H}_2 - q/t\,\widetilde{H}_{11}}{t-q} \\ &= \frac{t^2\,\widetilde{H}_2 - q^2\,\widetilde{H}_{11}}{qt(t-q)} \\ &= \frac{t^2\,(s_2+qs_{11}) - q^2(s_2+ts_{11})}{qt(t-q)} \\ &= \frac{(t+q)}{qt}s_2 + s_{11}.\end{aligned}$$

- De façon similaire, on obtient

$$\nabla^{-1}\, s_{11} = \nabla^{-1}\left(\frac{\widetilde{H}_2 - \widetilde{H}_{11}}{q-t}\right) = -\frac{s_2}{qt}.$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\kappa_2[X;q,t] = \left(\nabla^{-1}\,\omega\, s_2\left[\frac{X+1}{(1-t)(1-q)} - 1\right]\right)_{X\mapsto X(1-q)(1-t)-1}.$$

On commence par calculer la λ-substitution $s_2\left[\frac{X+1}{(1-t)(1-q)} - 1\right]$ puis on applique ω pour obtenir:

$$\frac{(q^2+qt+t^2-q^2t^2) + (q+t-qt)(q+1)(t+1)s_1 + (qt+1)s_{11} + (q+t)s_2}{(q-1)^2(t-1)^2(q+1)(t+1)}.$$

L'effet de ∇^{-1} puis de la λ-substitution envoyant X sur $(1-q)(1-t)X-1$, sur ce dernier résultat, donne bien:

$$\kappa_2 \;=\; \frac{1}{qt}[(q+t)s_{11}-s_2-(qt-1)s_1].$$

Pour revenir au calcul des composantes isotypiques, on substitue l'expression (9) pour les $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t)$ dans la formule (5) pour Φ_A. Plus précisément, pour $\mu \vdash n+1$ et $A \subseteq \pi(\mu)$, on a

$$\Phi_A = \sum_{\nu\in A} \widetilde{H}_\nu \frac{1}{\Omega_A^{(\nu)}(T_\nu)}, \tag{11}$$

où

$$\Omega_A^{(\nu)}(x) = \prod_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\neq\nu}} 1-x/T_\alpha.$$

Comme outil de calcul, on introduit l'expression suivante:

$$\Phi_A(x) := \sum_{\nu\in A} \widetilde{H}_\nu \frac{\Omega_A^{(\nu)}(x)}{\Omega_A^{(\nu)}(T_\nu)}. \tag{12}$$

Remarquons que lorsqu'on pose $x=0$ dans (12), on obtient Φ_A.

Rappelons qu'une version de la formule d'interpolation de Lagrange affirme que pour tout polynôme $P(X)$, on a

$$P(X) \equiv \sum_{\nu\in A} P(T_\nu)\,\frac{\Omega_A^{(\nu)}(x)}{\Omega_A^{(\nu)}(T_\nu)} \mod \Omega_A(x),$$

où $\Omega_A(x) := \prod_{\alpha\in A}(1-x/T_\alpha)$.

Nous allons utiliser cette formule pour trouver des formules explicites pour les coefficients $\Phi_{A,\lambda}$ dans l'expression des Φ_A en termes des fonctions de Schur:

$$\Phi_A = \sum_{\lambda\vdash n} \Phi_{A,\lambda} s_\lambda.$$

Comme on a par (9)

$$\widetilde{H}_\mu = \sum_{\lambda\vdash n} \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t)s_\lambda = \sum_{\lambda\vdash n} \kappa_\gamma[B_\mu]s_\lambda,$$

substituant dans l'équation (12), avec $\lambda = (n-k,\gamma)$, on obtient:

$$\Phi_{A,\lambda}(x) = \sum_{\nu\in A} \kappa_\gamma[B_\nu]\,\frac{\Omega_A^{(\nu)}(x)}{\Omega_A^{(\nu)}(T_\nu)}.$$

Comme $B_\nu = B_\mu - T_\mu/T_\nu$, on a

$$\begin{aligned}\Phi_{A,\lambda}(x) &= \sum_{\nu\in A} \kappa_\gamma[B_\mu - T_\mu/T_\nu]\,\frac{\Omega_A^{(\nu)}(x)}{\Omega_A^{(\nu)}(T_\nu)}\,,\\ &\equiv \kappa_\gamma[B_\mu - T_\mu/x] \mod \Omega_A(x).\end{aligned}$$

D'autre part, comme on s'intéresse aux partages de forme $\lambda = (2^j, 1^{n-2j})$, il est utile de savoir passer au partage conjugué, $\lambda' = (n-j,j)$. Pour ce faire, rappelons que

$$\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) = T_\mu(q,t)\,\widetilde{K}_{\lambda'\mu}(1/q,1/t).$$

Ceci implique que:

$$\Phi_{A,\lambda'}(x) \equiv x\,\kappa_\gamma^*[B_\mu^* - x/T_\mu] \mod \Omega_A(x), \tag{13}$$

où $\kappa_\gamma^*[X;q,t] = \kappa_\gamma[X;q^{-1},t^{-1}]$ et $B_\mu^*(q,t) = B_\mu(q^{-1},t^{-1})$. En résumé, on a les formules suivantes pour le calcul des composantes isotypiques de Φ_A:

Théorème 4.2.1

$$\Phi_{A,\lambda} = (\kappa_\gamma[B_\mu - T_\mu/x] \mod \Omega_A(x))\,|_{x=0},$$

et

$$\Phi_{A,\lambda'} = (\kappa_\gamma^*[B_\mu^* - x/T_\mu] \mod \Omega_A(x))\,|_{x=0}\,.$$

☺

Pour procéder à l'évaluation en $x=0$ de ces expressions, nous allons voir que

$$(x^n \mod \Omega_A(x))\,|_{x=0} = \begin{cases} h_n[\theta^*] & \text{si } n<0\,,\\ 1 & \text{si } n=0,\\ 0 & \text{si } 0<n\leq m-1,\\ (-1)^{m+1}\,h_{n-m}[\theta]\,\prod_{\alpha\in A} T_\alpha & \text{si } n\geq m,\end{cases} \tag{14}$$

où $m = |A|$, $\theta = \sum_{\alpha\in A} T_\alpha$, $\theta' = \sum_{\alpha\in A} 1/T_\alpha$, h_n est la n-ième fonction symétrique homogène complète et [-] représente une λ-substitution. Ces dernières formules découlent du lemme suivant:

Lemme 4.2.1 *Pour tout polynôme $P(X)$ avec terme constant égal à 1, on a*

$$\sum_{n\geq 0} \left((x^n \mod P(x)) \,|_{x=0} \right) z^n \;=\; 1 - \frac{1}{P(1/z)}$$

et

$$\sum_{n\geq 0} \left((x^{-n} \mod P(x)) \,|_{x=0} \right) z^n \;=\; \frac{1}{P(z)}$$

<u>Démonstration:</u>

Posons

$$R_n(x) = (x^n \mod P(x)),$$

où $P(x)$ est un polynôme tel que $P(0) = 1$. On a alors que

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} R_n(x)\, z^n &\equiv \frac{1}{1-xz} \mod P(x) \\ &\equiv \frac{1 - \frac{P(x)}{P(1/z)}}{1-xz} \mod P(x). \end{aligned}$$

En effet $P(x) \cdot \dfrac{1}{P(1/z)} \equiv 0 \mod P(x)$ puisque $P(1/z)$ est indépendant de x. De plus, en tant que polynôme en x, $1 - P(x)/P(1/z)$ se divise sans reste par $1 - xz$, (car $1/z$ est racine de $1 - P(x)/P(1/z)$). Le polynôme obtenu sera donc de degré strictement inférieur au degré de $P(x)$. On obtient donc l'égalité suivante:

$$\sum_{n\geq 0} R_n(x)\, z^n \;=\; \frac{1 - \frac{P(x)}{P(1/z)}}{1-xz}.$$

Puisque

$$(x^n \mod P(x)) \,|_{x=0} := R_n(0),$$

et posant $r_n := R_n(0)$, on a

$$\sum_{n\geq 0} r_n\, z^n \;=\; 1 - \frac{1}{P(1/z)}.$$

De façon semblable, on obtient, pour les puissances négatives que:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} x^{-n}\, z^n \quad \bmod\ P(x) &\equiv \frac{1}{1 - z/x} \quad \bmod\ P(x),\\ &\equiv \frac{1 - \frac{z\,P(x)}{x\,P(z)}}{1 - z/x} \quad \bmod\ P(x).\end{aligned}$$

Et donc

$$\sum_{n\geq 0} (x^{-n} \bmod\ P(x))\, z^n = \frac{x\,P(z) - z\,P(x)}{x - z} \cdot \frac{1}{P(z)},$$

ce qui implique finalement que

$$\sum_{n\geq 0} \left((x^{-n} \quad \bmod\ P(x))\,|_{x=0}\right) z^n \;=\; \frac{1}{P(z)}.$$

☺

Dans notre cas on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} ((\, x^{-n} \quad \bmod\ \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0})\, z^n &= \frac{1}{\Omega_A(z)}\,,\\ &= \frac{1}{\prod_{\alpha\in A} (1 - z/T_\alpha)}\,.\end{aligned}$$

Comme la série génératrice des fonctions homogènes est:

$$\sum_{n\geq 0} h_n[x_1, \ldots, x_m] z^n \;=\; \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - z x_i},$$

on trouve

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in A} (1 - z/T_\alpha)} \;=\; \sum_{n\geq 0} h_n[\theta^*]\, z^n,$$

où $\theta^* = \sum_{\alpha\in A} 1/T_\alpha$. On a de plus que,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} ((\, x^{n} \quad \bmod\ \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0})\, z^n &= 1 - \frac{1}{\Omega_A(1/z)}\,,\\ &= 1 - \prod_{\alpha\in A} \frac{1}{1 - \frac{1}{zT_\alpha}}\,,\\ &= 1 - \prod_{\alpha\in A} \frac{zT_\alpha}{zT_\alpha - 1}\,.\end{aligned}$$

Si $|A| = m$, alors

$$1 - \prod_{\alpha \in A} \frac{zT_\alpha}{zT_\alpha - 1} \;=\; 1 + (-1)^{m+1} \left(\prod_{\alpha \in A} T_\alpha \right) z^m \cdot \prod_{\alpha \in A} \frac{1}{1 - zT_\alpha} \,,$$

où

$$\prod_{\alpha \in A} \frac{1}{1 - zT_\alpha} \;=\; \sum_{n \geq 0} h_n[\theta] z^n ,$$

où $\theta = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$. Ceci implique clairement l'équation (14).

Voyons maintenant comment ces résultats permettent un calcul effectif:

Exemple 4.2.5 Calculons $\Phi_{A,21^{n-2}}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{A,21^{n-2}}(x) \;&\equiv\; x\, \kappa_1^* \left[B_\mu^* - x/T_\mu \right] \mod \Omega_A(x), \\ &\equiv\; x \left((B_\mu^* - x/T_\mu) - 1 \right) \mod \Omega_A(x), \\ &\equiv\; (B_\mu^* - 1)\, x - x^2/T_\mu \mod \Omega_A(x), \end{aligned}$$

la deuxième équivalence venant du fait que $\kappa_1 = e_1 - 1$. Si $A = \{\alpha, \beta\}$, alors

$$(\, x \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} \;=\; 0\,,$$

et

$$\begin{aligned} (\, x^2 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} \;&=\; (-1)^3\, T_\alpha T_\beta\, h_0[T_\alpha + T_\beta]\,, \\ &=\; -T_\alpha T_\beta\,. \end{aligned}$$

Si $|A| \geq 3$ alors il est clair que

$$(\, x \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} = (\, x^2 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} = 0.$$

En résumé, on a:

Proposition 4.2.3

$$\Phi_{A,21^{n-2}} \;=\; \begin{cases} T_{\rho(A)} & \text{si } A = \{\alpha, \beta\}\,, \\ 0 & \text{si } |A| \geq 3, \end{cases}$$

où $\rho(A) = \bigcap_{\alpha \in A} \alpha$.

Corollaire 4.2.1 *Modulo la conjecture 4.2.4, on a*

$$\Psi_A = T_{\rho(A)} s_{21^{n-2}} + \textit{autres termes.}$$

On observe que

$$T_{\rho(A)} = \frac{\prod_{\alpha\in A} T_\alpha}{{T_\mu}^{m-1}}, \tag{15}$$

où $m = |A|$.

Exemple 4.2.6 Maintenant, calculons $\Phi_{A,2^21^{n-4}}$:

L'équation (13) implique que

$$\Phi_{A,2^21^{n-4}}(x) \equiv x\,\kappa_2^*\left[B_\mu^* - x/T_\mu\right] \mod \Omega_A(x).$$

Comme

$$\kappa_2 \;=\; \frac{1}{qt}[(q+t)s_{11} - s_2 - (qt-1)s_1],$$

et que κ_2^* est obtenu en substituant t par $1/t$ et q par $1/q$ dans κ_2, on obtient:

$$\begin{aligned}
\kappa_2^* &= qt[\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{t}\right)s_{11} - s_2 - \left(\frac{1}{qt}-1\right)s_1],\\
&= (t+q)s_{11} - qt\,s_2 + (qt-1)\,s_1.
\end{aligned}$$

Il en découle que

$$x\,\kappa_2^*\left[B_\mu^* - x/T_\mu\right] = \frac{(q+t)}{{T_\mu}^2}x^3 + \left(\frac{(qt-q-t)}{T_\mu}B_\mu^* - \frac{(qt-1)}{T_\mu}\right)x^2 + x\,\kappa_2^*[B_\mu^*].$$

Si $A = \{\alpha,\beta\}$, alors on a déjà vu que

$$\begin{aligned}
(\,x \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} &= 0\,,\\
(\,x^2 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} &= -T_\alpha T_\beta
\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}
(\,x^3 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} &= (-1)^3\,T_\alpha\,T_\beta\,h_1[T_\alpha + T_\beta]\,,\\
&= -T_\alpha T_\beta\,(T_\alpha + T_\beta)\,,\\
&= -T_\alpha^2 T_\beta - T_\alpha T_\beta^2.
\end{aligned}$$

D'où:

$$\Phi_{A,2^21^{n-4}} = \frac{(q+t)}{{T_\mu}^2}(-T_\alpha^2 T_\beta - T_\alpha T_\beta^2) + \left(\frac{(qt-q-t)}{T_\mu}B_\mu^* - \frac{(qt-1)}{T_\mu}\right)(-T_\alpha T_\beta),$$

ce qui s'écrit plus simplement comme:

$$\Phi_{A,2^21^{n-4}} = T_{\rho(A)}\left((t+q-qt)B_\mu^* - (t+q)\left(\frac{T_\alpha + T_\beta}{T_\mu}\right) + (qt-1)\right).$$

Pour $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, on trouve

$$\begin{aligned}
(\, x \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} &= 0\,, \\
(\, x^2 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} &= 0\,, \\
(\, x^3 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} &= (-1)^4\, h_0\,[T_\alpha + T_\beta + T_\gamma]\, T_\alpha T_\beta T_\gamma\,, \\
&= T_\alpha T_\beta T_\gamma.
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\Phi_{A,2^21^{n-4}}(x) &= (t+q)\left(\frac{T_\alpha T_\beta T_\gamma}{{T_\mu}^2}\right), \\
&= T_{\rho(A)}(t+q).
\end{aligned}$$

Lorsque $|A| \geq 4$, il est clair que

$$(\, x \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} = (\, x^2 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} = (\, x^3 \mod \Omega_A(x)\,)\,|_{x=0} = 0.$$

En résumé, on a donc:

Proposition 4.2.4

$$\Phi_{A,2^21^{n-4}} = \begin{cases} T_{\rho(A)}\left((t+q-qt)B_\mu^* - (t+q)\left(\frac{T_\alpha+T_\beta}{T_\mu}\right) + (qt-1)\right) & \text{si } A = \{\alpha,\beta\}\,, \\ T_{\rho(A)}(t+q) & \text{si } A = \{\alpha,\beta,\gamma\} \\ 0 & \text{si } |A| \geq 4. \end{cases}$$

On peut montrer, modulo la conjecture 4.2.4, que

$$\langle \Psi_A, s_{221^{n-4}} \rangle = 0,$$

si $A \subseteq \pi(\mu)$, avec $|\pi(\mu)| > 2$.

Corollaire 4.2.2 *Modulo la conjecture 4.2.4 on a*

$$\Psi_A = T_{\rho(A)}(q+t)s_{221^{n-4}} + \textit{autres termes.}$$

4.2.3 Construction d'éléments cycliques du sommet de $\mathbf{M}_A$

Les calculs de la section précédente nous permettent de caractériser le bidegré des composantes isotypiques de l'intersection. Revenons donc à l'étude de la famille des polynômes de degrés maximaux dans l'intersection $\mathbf{M}_A$. Pour décrire ceux-ci, on considère d'abord les constructions suivantes:

Définition 4.2.3 Un *diagramme* α est un ensemble d'éléments (cases) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exemple 4.2.7 Soit $\alpha = \{(0,0), (1,1), (0,2), (2,1), (3,0)\}$ alors,

$$\alpha = \begin{array}{cccc} \boxed{02} & & & \\ & \boxed{11} & \boxed{21} & \\ \boxed{00} & & & \boxed{30} \end{array} .$$

Remarque: Tous les partages sont des diagrammes et on peut généraliser aux diagrammes, la plupart des concepts ayant rapport aux partages.

Définition 4.2.4 Le *conjugué* d'un diagramme α, α', est l'ensemble de cases suivant:

$$\alpha' = \{(i,j) \mid (j,i) \in \alpha\}.$$

Exemple 4.2.8 Si α est le diagramme de l'exemple précédent, alors,
$\alpha' = \{(0,0), (2,0), (1,1), (1,2), (0,3)\}$, c'est-à-dire,

$$\alpha' = \begin{array}{ccc} \boxed{03} & & \\ & \boxed{12} & \\ & \boxed{11} & \\ \boxed{00} & & \boxed{20} \end{array} .$$

Définition 4.2.5 Soit α un diagramme. On définit Δ_α de la même manière que pour les partages, c'est-à-dire que, si les (p_j, q_j) représentent les cases ordonnées du diagramme, alors

$$\Delta_\alpha = \text{dét} \mid x_i^{p_j} y_i^{q_j} \mid .$$

Exemple 4.2.9 Pour

$$\alpha = \begin{array}{ccc} \boxed{02} & & \\ & \boxed{11} & \\ \boxed{00} & & \boxed{20} \end{array} ,$$

on a,

$$\Delta_\alpha \quad = \quad \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 \\ {y_1}^2 & {y_2}^2 & {y_3}^2 & {y_4}^2 \end{pmatrix} .$$

En imitant la construction de Garnir, c'est-à-dire en associant à un partage λ, de forme $2^k 1^j$, deux diagrammes α et β (au lieu de lui associer 2 colonnes), avec $\alpha \subseteq \beta$, on obtient une représentation de Frobenius $= s_{2^k 1^j}$ de la forme:

$$\mathcal{V}_{\alpha,\beta} := \mathcal{L}\{\sigma \Delta_\alpha(X_k, Yk) \Delta_\beta(\overline{X_k}, \overline{Y_k}) \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}$$

où $|\alpha| = k$, $|\beta| = k + j$, $X_k = x_1, \cdots, x_k$ et $\overline{X_k} = x_{k+1}, \cdots, x_n$. La proposition qui suit nous montre que le $\mathcal{S}_n$-module $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ (pour $\alpha \subseteq \beta$) est bien irréductible de caractéristique de Frobenius égale à $s_{2^k 1^j}$:

Proposition 4.2.5 *Si λ est un partage de n et si $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, où les α_i sont des diagrammes ayant respectivement λ_i' cases, avec $\alpha_{i+1} \subseteq \alpha_i$, alors*

$$\mathcal{L}[\Delta_\mathcal{A}^T \mid T \text{ tableau standard de forme } \lambda],$$

est un sous-espace invariant irréductible de $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]$ ayant s_λ comme image de Frobenius.

(À chaque tableau standard T de forme λ, on associe la permutation, σ_T obtenue en "lisant" les entrées du tableau T de bas en haut et de gauche à droite. Pour $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, on pose

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_k},$$

où Δ_{α_1} utilise les λ'_1 premières variables, Δ_{α_2}, les λ'_2 suivantes et ainsi de suite. On obtient alors $\Delta^T_{\mathcal{A}}$ en faisant agir la permutation σ_T sur $\Delta_{\mathcal{A}}$.)

Idée de la preuve:

Nous illustrons la démarche pour le cas où $\lambda = 2^k 1^j$. Soit α_1 et α_2 des diagrammes avec $\mid \alpha_1 \mid = k + j$, $\mid \alpha_2 \mid = k$ et $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$. On pose,

$$m_T^{\alpha_1,\alpha_2} = \left(\prod_{i=1}^{k+j} {x_i}^{a_i} {y_i}^{b_i} \right) \left(\prod_{l=1}^{k} {x_{k+l}}^{c_l} {y_{k+l}}^{d_l} \right)$$

où les (a_i, b_i) sont les cases de α_1, les (c_l, d_l) sont celles de α_2, et ces cases sont énumérées de façon à ce que $(a_i, b_i) = (c_i, d_i)$, pour $1 \leq i \leq k$. En "imitant" la preuve de N. Bergeron et A. Garsia (Bergeron N. - Garsia, 1992), qui analyse l'effet de l'idempotent de Young associé à T sur $m_T^{\alpha_1,\alpha_2}$, on obtient le résultat voulu. ☺

Exemple 4.2.10 Considérons le cas $\mu = 321$, pour lequel on cherche à décrire l'intersection:

$$\mathbf{M}_{32} \cap \mathbf{M}_{311} \cap \mathbf{M}_{221}.$$

Des calculs sur ordinateur montrent que les polynômes bihomogènes de degré total maximal de l'intersection sont des polynômes de bidegré $(2, 1)$ et $(1, 2)$.
Une base de bidegré $(2, 1)$ est obtenue en considérant l'image de

$$\Delta_\alpha(x_1, x_2; y_1, y_2)\Delta_\beta(x_3, x_4, x_5; y_3, y_4, y_5) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix},$$

selon l'ensemble des permutations associées aux tableaux standards:

$$
\begin{array}{|c|c}
\cline{1-1}
3 & \\
\hline
2 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c}
\cline{1-1}
4 & \\
\hline
2 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c}
\cline{1-1}
5 & \\
\hline
2 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c}
\cline{1-1}
4 & \\
\hline
3 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c}
\cline{1-1}
5 & \\
\hline
3 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
(12345) & (12435) & (12534) & (13425) & (13524)
\end{array}
$$

De même, la base de bidegré $(1,2)$ est obtenue en considérant l'image de

$$\Delta_\alpha(1,2)\Delta_\beta(3,4,5) = \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix},$$

selon le même ensemble de permutations. Ici, on utilise la notation $\Delta_\alpha(1,2)$ pour $\Delta_\alpha(x_1, x_2; y_1, y_2)$.

Plusieurs expérimentations avec MapleV nous amène à une reformulation de notre conjecture:

Conjecture 4.2.5 *Pour chaque partage μ et chaque ensemble $A \subseteq \pi(\mu)$, on peut trouver $\mathfrak{a}_A$, un système pur de générateurs bihomogènes de $\mathbf{M}_A$ tel que chaque $P \in \mathfrak{a}_A$ est de la forme*

$$P = \sum_{(\alpha,\beta)\in D_P} a_{\alpha\beta}\, \Delta_\alpha(1,\ldots,k)\, \Delta_\beta(k+1,\ldots,n), \tag{16}$$

avec $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ et où chaque $(\alpha,\beta) \in D_P$ est tel que:

- $\alpha,\, \beta \subseteq \rho(A)$,
- *Pour P fixé et $(\alpha,\beta) \in D_P$,*

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}_n \cdot P) = s_{2^{j_P}1^{n-2j_P}},$$

avec $j \geq |\alpha \cap \beta|$ et $j = |\alpha|$ si $\alpha \subseteq \beta$.

Autrement dit, on peut décrire

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_A := \bigcap_{\nu \in A} \mathbf{M}_\nu &= \mathcal{L}_\partial(\mathcal{S}_n \cdot a_A) \\
&= \mathcal{L}_\partial\left(\mathcal{S}_n \cdot \sum_{\alpha,\beta} (a_{\alpha\beta} \Delta_\alpha(1,\ldots,|\alpha|)\Delta_\beta(|\alpha|+1,\ldots,n))\right),
\end{aligned}
$$

où les (α, β) sont certains couples de sous-diagrammes de $\rho(A)$. On a "souvent" la situation $\alpha \subseteq \beta$ et $P = \Delta_\alpha(1,\ldots,|\alpha|)\Delta_\beta(|\alpha|+1,\ldots,n)$.

Cette conjecture affirme donc qu'on peut produire un tel ensemble a_A en trouvant des polynômes maximaux qui sont produits de 2 déterminants (ou somme de tels produits). On trouve des candidats possibles pour α et β en examinant les contraintes et on montre que cet élément est cyclique en produisant un "certificat" pour cet élément cyclique, c'est-à-dire des opérateurs différentiels qui permettent de l'obtenir à partir de chacun des $\alpha \in A$. Voyons un exemple:

Exemple 4.2.11 Pour $\mu = 43$ et l'intersection:

$$\mathbf{M}_{42} \cap \mathbf{M}_{33}.$$

la composante maximale de Φ_{43} est:

$$q^6 s_{222} + t q^5 s_{2211} + t^2 q^4 s_{21111}.$$

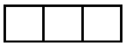
Pour $q^6 s_{222}$ on "a"(en supposant qu'on est dans la situation simple) les contraintes suivantes:

- $\alpha, \beta \subseteq \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-2} \ & \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$,
- $|\alpha| = 3$,

Après examen, la seule possibilité est:

$$\alpha := \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$$

et

$\beta :=$  .

Le “certificat” suivant nous prouve alors que $\Delta_\alpha(1,2,3)\Delta_\beta(4,5,6)$ se situe bien dans l'intersection:

$$(\partial x_1 \partial y_2 \partial y_3 + \partial x_2 \partial y_1 \partial y_3 + \partial x_3 \partial y_1 \partial y_2)\Delta_{42} = \Delta_3(1,2,3)\ \Delta_3(4,5,6),$$

$$(\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3)\Delta_{33} = \Delta_3(1,2,3)\ \Delta_3(4,5,6).$$

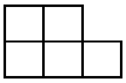
Pour $t^2q^4s_{21111}$ on “a” les contraintes suivantes:

- α, $\beta \subseteq$ ,
- $|\alpha| = 1$,

On a une seule possibilité, qui est la suivante:

$\alpha :=$ 

et

$\beta :=$  .

Le “certificat” suivant nous prouve alors que $\Delta_\alpha(6)\Delta_\beta(1,2,3,4,5)$ se situe bien dans l'intersection:

$$(\partial {x_6}^3)\Delta_{42} = \Delta_{32}(1,2,3,4,5),$$

$$(\partial {x_6}^2 \partial y_6)\Delta_{33} = \Delta_{32}(1,2,3,4,5).$$

Pour tq^5s_{2211}, les choses sont un peu plus compliquées et nous allons étudier ce cas un peu plus loin.

Dans l'exemple précédent, nous avons trouvé facilement un seul candidat pour le couple (α,β). Il se peut cependant que les contraintes soient satisfaites par plusieurs couples

(α, β). Dans ce cas, on doit chercher une combinaison linéaire des $\Delta_\alpha \Delta_\beta$ correspondant. Pour que cette combinaison linéaire soit dans l'intersection, on doit trouver des opérateurs différentiels Γ^ν, $\nu \in A$, (le "certificat") tels que

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} \Delta_\nu = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \Delta_{\alpha,\beta},$$

où $\Delta_{\alpha,\beta}$ est une notation pour le produit $\Delta_\alpha(1, \ldots, |\alpha|)\Delta_\beta(|\alpha|+1, \ldots, n)$.

Exemple 4.2.12 Revenons à l'exemple où $\mu = 43$ et à l'intersection

$$\mathbf{M}_{42} \cap \mathbf{M}_{33}.$$

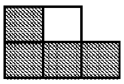
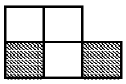
Alors, on a dans la composante de degré maximal de Φ_{43} l'élément suivant:

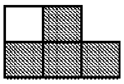
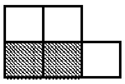
$$q^5 t s_{2211}.$$

On cherche donc α et β tels que:

- $\alpha, \beta \subseteq \rho(A) =$,
- $|\alpha| = 2$.

Les paires de diagrammes possibles sont alors:

$\beta_1 =$  , $\alpha_1 =$  ,

$\beta_2 =$  , $\alpha_2 =$  .

Pour cet exemple, on trouve via l'ordinateur (voir procédure en annexe), le "certificat" suivant:

$$\frac{h_2(\partial x_1 \partial x_2) h_1(\partial y_1 \partial y_2)}{-3} \Delta = \Delta_{\alpha_1,\beta_1} - 2\,\Delta_{\alpha_2,\beta_2},$$

$$\frac{h_1(\partial x_1 \partial x_2) h_1 * h_1(\partial y_1 \partial y_2)}{2} \Delta = \Delta_{\alpha_1,\beta_1} - 2\,\Delta_{\alpha_2,\beta_2},$$

où, par exemple, $h_2(\partial x_1 \partial x_2)$ est l'opérateur différentiel obtenu en remplaçant x_i par ∂x_i dans la fonction homogène h_2. L'élément cyclique cherché est donc $\Delta_{\alpha_1,\beta_1} - 2\,\Delta_{\alpha_2,\beta_2}$.

La table suivante donne des exemples de tels opérateurs (à une constante non nulle près).

ν	(α, β)	$\Gamma^{\nu}_{\alpha,\beta}$
$\ydiagram{1,3}$	$(\ydiagram{2}, \ydiagram{2})$	$(\partial x_1 + \partial x_2)(\partial y_1 + \partial y_2)$
$\ydiagram{1,3}$	$(\ydiagram{2}, \ydiagram{1,1})$	$\partial x_1 \partial x_2$
$\ydiagram{2,2}$	$(\ydiagram{2}, \ydiagram{2})$	$\partial y_1 \partial y_2$
$\ydiagram{1,4}$	$(\ydiagram{3}, \ydiagram{2})$	$(\partial {x_1}^2 + \partial {x_2}^2)(\partial y_1 + \partial y_2)$
$\ydiagram{1,4}$	$(\ydiagram{1,2}, \ydiagram{2})$	$\partial {x_1}^2 \partial {x_2}^2$
$\ydiagram{1,4}$	$(\ydiagram{3}, \ydiagram{1,1})$	$(\partial {x_1}^3 + \partial {x_2}^3)(\partial {y_1}^2 \partial y_2 + \partial {y_2}^2 \partial y_1)$
$\ydiagram{2,3}$	$(\ydiagram{3}, \ydiagram{2})$	$\partial y_1 \partial y_2$
$\ydiagram{2,3}$	$(\ydiagram{1,2}, \ydiagram{2})$	$(\partial {x_1}^2 + \partial {x_2}^2)(\partial y_1 + \partial y_2)$
$\ydiagram{2,3}$	$(\ydiagram{1,2}, \ydiagram{1,1})$	$\partial {x_1}^2 \partial x_2 + \partial {x_2}^2 \partial x_1$
$\ydiagram{1,1,3}$	$(\ydiagram{1,2}, \ydiagram{2})$	$(\partial x_1 + \partial x_2)(\partial {y_1}^2 + \partial {y_2}^2)$
$\ydiagram{1,1,3}$	$(\ydiagram{1,1,1}, \ydiagram{2})$	$\partial x_1 \partial x_2$

Figure 4.3: Table d'opérateurs différentiels

De nos expérimentations, il semble qu'on peut toujours réaliser la composante de degré total maximal d'une intersection comme orbite d'éléments de la forme

$$P(\partial X_k, \partial Y_k) Q(\partial \overline{X_k} \partial \overline{Y_k}) \Delta_\mu,$$

avec $P(X_k, Y_k)$ et $Q(\overline{X_k}, \overline{Y_k})$ diagonalement symétriques en les variables $X_k = x_1, \ldots, x_k$, $Y_k = y_1, \ldots, y_k$ et $\overline{X_k} = x_{k+1}, \ldots, x_n$, $\overline{Y_k} = y_{k+1}, \ldots, y_n$. (On est souvent dans le cas $Q = 1$.) Ceci pourrait se reformuler comme conjecture mais ce sera l'objet d'un texte à venir. L'effet de tels opérateurs sur Δ_α devient plus évident lorsqu'on considère le développement de Δ_α selon des sous-ensembles de variables. Plus précisément:

Définition 4.2.6 Développement de Laplace généralisé

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $m \leq n$, un sous-ensemble fixe tel que $|I| = m$, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ un sous-ensemble quelconque de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $|J| = m$. On désigne par A_I^J le mineur carré d'ordre m de A obtenu en ne retenant que les lignes $i \in I$ et les colonnes $j \in J$, et par $(A_I^J)^c$, le mineur complémentaire de A, carré d'ordre $n - m$, obtenu en éliminant les lignes $i \in I$ et les colonnes $j \in J$. Finalement, on désigne par ΣI la somme des éléments de I.

$$\text{dét}\, A = \sum_{|J|=m} (-1)^{\Sigma I + \Sigma J} (\text{dét} A_I^J)(\text{dét}(A_I^J)^c).$$

Remarque: Dans notre cas, la définition du développement de Laplace généralisé se traduit comme suit:

$$\Delta_\gamma = \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ |\alpha|=k}} (-1)^{s(\alpha)}\, \Delta_\alpha(X_k, Y_k)\, \Delta_\beta(\overline{X_k}, \overline{Y_k}),$$

où $s_k(\alpha)$ est un entier qui dépend de α et de k.

En première approximation, il faut donc trouver, pour chaque contribution de la forme $q^a t^b s_{2^k 1^{n-2k}}$ dans Ψ_A, un opérateur $P(\partial X_k, \partial Y_k)$ diagonalement symétrique tel que

$$P(\partial X_k, \partial Y_k)\Delta_\mu \;=\; \sum_{\substack{\alpha+\beta=\mu \\ |\alpha|=k}} (-1)^{s(\alpha)}\, \underbrace{\left(P(\partial X_k, \partial Y_k)\Delta_\alpha(X_k, Y_k)\right)}_{(*)}\, \Delta_\beta(\overline{X_k}, \overline{Y_k})\;,$$

où $\alpha, \beta \subset \rho(A)$ et bidegré de $P = (n(\mu') - a, n(\mu) - b)$. Nous allons donner ci-dessous une description du terme $(*)$ lorsque $P(\partial X_k, \partial Y_k)$ est diagonalement symétrique (voir proposition 4.2.6).

La généralisation de tels opérateurs et la présentation plus systématique de tout cela fera l'objet d'un travail à venir. Pour l'instant, voici quelques résultats qui supportent notre développement.

Lorsque le diagramme μ ne contient qu'une seule ligne, le calcul que nous considérons est facilement décrit via le lemme suivant:

Lemme 4.2.2 *Pour $k < n$ et toutes fonctions $f(x_1, \ldots, x_k)$ et $g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ symétriques en leurs variables respectives, on a*

$$f(\partial x_1, \ldots, \partial x_k) g(\partial x_{k+1}, \ldots, \partial x_n)\Delta_{(n)}(X) = P(X)\Delta_{(k),(n-k)},$$

pour un certain polynôme $P(X)$. De plus, si $j = \binom{n}{2} - \binom{k}{2} - \binom{n-k}{2}$ et $\lambda \vdash j$ est un partage contenu dans $\delta_n = (n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$, alors

$$m_\lambda(\partial x_1, \ldots, \partial x_k)\Delta_{(n)}(X) = c\,\Delta_{(k)}(x_1, \ldots, x_k)\,\Delta_{(n-k)}(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

pour une certaine constante $c \neq 0$.

Démonstration:

Il est clair que $f(\partial x_1, \ldots, \partial x_k)g(\partial x_{k+1}, \ldots, \partial x_n)\Delta_{(n)}(X)$ est antisymétrique par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_k$ et indépendament par rapport aux variables $x_{k+1}, \ldots, x_n$. La première partie du lemme résulte du fait que tout polynôme antisymétrique est divisible par le déterminant de Vandermonde (voir lemme 1.3.1), d'où $\Delta_{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$ et $\Delta_{(n-k)}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ divisent tous deux $f(\partial x_1, \ldots, \partial x_k)g(\partial x_{k+1}, \ldots, \partial x_n)\Delta_{(n)}(X)$. De plus, il est clair que $\Delta_{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$ et $\Delta_{(n-k)}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ sont relativement premier. La deuxième partie du lemme est facilement vérifiée en considérant l'effet de $m_\lambda(\partial x_1, \ldots, \partial x_k)$ sur le monôme dominant de $\Delta_{(n)}(X)$:

$$x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-2}^2 x_{n-1}.$$

☺

L'effet d'opérateurs diagonalement symétriques sur Δ_α est caractérisé par la proposition suivante:

Proposition 4.2.6 *Pour tout entier a et b et tout diagramme α à k cases, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \partial x_i{}^a \partial y_i{}^b\right) \Delta_\alpha = \sum_\gamma g_{a,b}^\gamma \Delta_\gamma,$$

où les $g_{a,b}^\gamma$ sont des constantes et où γ varie dans l'ensemble des diagrammes obtenus de α en remplaçant une de ses case, (p,q), par la case $(p-a, q-b)$ si $p - a \geq 0$, $q - b \geq 0$ et si cette dernière case n'est pas déjà dans α.

Démonstration:

Par récurrence sur le nombre de cases de α: Si α à une case de coordonnée (p,q), alors on a

$$\Delta_\alpha \,=\, {x_1}^p\, {y_1}^q,$$

et lorsqu'on applique l'opérateur $\partial {x_i}^a \partial {y_i}^b$, on obtient:

$$\partial {x_i}^a \partial {y_i}^b ({x_1}^p\, {y_1}^q) = (p)_a\,(q)_b\, {x_1}^{p-a}\, {y_1}^{q-b},$$

où $(u)_k = u(u-1)\ldots(u-k+1)$, ce qui est bien le résultat souhaité. (En fait, on voit que l'opérateur $\partial {x_i}^a \partial {y_i}^b$ déplace une case de $-a$ coordonnées en x et de $-b$ coordonnées en y.)

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout α tel que $|\alpha| \leq k$ et montrons que le résultat tient pour $|\alpha| = k+1$. On utilise le développement de Δ_α selon les variables x_i et y_i:

$$\Delta_\alpha = \sum_{(p,q)\in\alpha} (-1)^{s_{i,p,q}}\, x_i^p y_i^q\, \Delta_{\alpha\backslash(p,q)}, \tag{18}$$

où $(-1)^{s_{i,p,q}}$ est le signe adéquat. On a alors que

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} \partial {x_i}^a \partial {y_i}^b\right) \Delta_\alpha = \sum_{(p,q)\in\alpha} (-1)^{s_{i,p,q}}\, \partial {x_i}^a \partial {y_i}^b ({x_i}^p {y_i}^q) \sum_{i\neq j} \partial {x_i}^a \partial {y_i}^b (\Delta_{\alpha\backslash(p,q)}).$$

Ce résultat est non nul si et seulement si $\partial {x_i}^a \partial {y_i}^b ({x_i}^p {y_i}^q) \neq 0$ à savoir lorsque $p-a \geq 0$ et $q-b\geq 0$, et $\sum_{i\neq j} \partial {x_i}^a \partial {y_i}^b (\Delta_{\alpha\backslash(p,q)}) \neq 0$ et alors l'hypothèse de récurrence nous assure qu'on a le résultat voulu. ☺

Corollaire 4.2.3 *Si f est une fonction symétrique alors*

$$f(\partial)\Delta_\mu = 0$$

où, si $f = f(x_1,\ldots,x_n; y_1,\ldots,y_n)$ alors $f(\partial) = f(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_n};\partial_{y_1},\ldots,\partial_{y_n})$.

Démonstration:

On a vu que les sommes de puissance forment une base pour les polynômes symétriques. De la même façon, toute fonction diagonalement symétrique, $f(X,Y)$, s'écrit dans la base des

$$D_{ab} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^a {y_i}^b.$$

Il suffit donc de montrer que

$$D_{ab}(\partial)\Delta_\mu = 0, \quad \forall a, b,$$

où $D_{ab}(\partial)$ est l'opérateur obtenu en remplaçant x_i par ∂x_i et y_i par ∂y_i dans $D_{ab}(X,Y)$. Mais, le résultat est immédiat puisqu'on ne peut déplacer aucune case de μ. (μ n'a pas de trou.) ☺

Il est intéressant de remarquer ici qu'il découle de cette proposition que Δ_μ est diagonalement harmonique.

Corollaire 4.2.4 *Soit μ un partage et (a,b) les coordonnées d'un des coins de μ. Alors, un opérateur qui permet de passer de Δ_μ à $\Delta_{\mu\setminus\{(a,b)\}}$ est $P(\partial_{X_n}, \partial_{Y_n}) = \partial x_n^a \partial y_n^b$.*

Démonstration:

Comme (a,b) est un coin de μ, il est clair que

$$\partial {x_i}^a \partial {y_i}^b ({x_n}^p {y_n}^q) = 0,$$

pour tout autre case (p,q) que (a,b) puisqu'alors soit $p-a<0$ ou $q-b<0$. Ceci implique que le seul terme qui n'est pas "tué" par l'opérateur $\partial {x_i}^a \partial {y_i}^b$ dans le développement de Δ_μ selon la dernière variable est

$$\partial {x_n}^a \partial {y_n}^b ({x_n}^a {y_n}^b) = (a)_a\,(b)_b.$$

☺

Nous sommes maintenant en mesure d'identifier certains éléments d'intersections de modules $\mathbf{M}_\alpha$. En effet, on a

Corollaire 4.2.5 *Soit μ un partage de n alors,*

$$\Delta_{\alpha\cap\beta}(1,\ldots,n-1) \in \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta,$$

si $\alpha, \beta \in \pi(\mu)$ et

$$\Delta_{\square\!\square}(1,2)\; \Delta_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}(3,\ldots,n) \in \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta \cap \mathbf{M}_\gamma,$$

$$\Delta_{\begin{smallmatrix}\square\\[-4pt]\square\end{smallmatrix}}(1,2)\; \Delta_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}(3,\ldots,n) \in \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta \cap \mathbf{M}_\gamma,$$

si $\alpha, \beta, \gamma \in \pi(\mu)$.

<u>Démonstration:</u>

Soit (a,b) et (c,d) des coins de μ tels que $\beta = \mu \setminus (a,b)$, $\alpha = \mu \setminus (c,d)$, alors

$$\Delta_{\alpha\cap\beta} = \Delta_{\alpha\setminus(a,b)} = \Delta_{\beta\setminus(c,d)}.$$

Alors, via le corollaire 4.2.1, on trouve le "certificat" suivant:

$$\partial {x_n}^a \partial {y_n}^b \Delta_\alpha = \Delta_{\alpha\cap\beta},$$

$$\partial {x_n}^c \partial {y_n}^d \Delta_\beta = \Delta_{\alpha\cap\beta},$$

ce qui implique la première partie du corollaire. Pour la deuxième partie du corollaire, il suffit (par symétrie) de vérifier que pour $\alpha = \mu \setminus (a,b)$, si (c,d) et (e,f) sont les coins associés à β et α respectivement alors,

$$(\partial {x_1}^c \partial {y_1}^d \partial {x_2}^{e-1} \partial {y_2}^f + \partial {x_1}^{e-1} \partial {y_1}^f \partial {x_2}^c \partial {y_2}^d)\Delta_\alpha = \text{cte}\,\Delta_{\square\!\square}(1,2)\; \Delta_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}(3,\ldots,n).$$

☺

De plus, on peut vérifier facilement que $\Delta_{\alpha\cap\beta}$ est maximal dans $\mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta$ en calculant l'effet de $\partial x_n{}^{a-1} \partial y_n{}^b$ sur Δ_α. Ceci est plus délicat pour les éléments correspondants de $\mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta \cap \mathbf{M}_\gamma$. Bien entendu, il découle de la proposition 4.2.4 et d'un calcul de bidegré que:

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}_n\, \Delta_{\alpha\cap\beta}(1,\ldots,n-1)) \;=\; T_{\alpha\cap\beta}\, s_{21^{n-2}},$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}_n\, \Delta_{\square\square}(1,2)\Delta_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}(3,\ldots,n)) \;=\; q\, T_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}\, s_{2^21^{n-4}},$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}_n\, \Delta_{\substack{\square\\\square}}(1,2)\Delta_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}(3,\ldots,n)) \;=\; t\, T_{\alpha\cap\beta\cap\gamma}\, s_{2^21^{n-4}},$$

ce qui est en accord parfait avec les formules pertinentes des corollaires 4.2.4 et 4.2.5.

Ces résultats, et des extensions, permettent d'expliquer la table 4.3 et de calculer, dans plusieurs cas, les éléments cycliques du sommet de $\mathbf{M}_A$. Nous nous proposons de développer cette partie de notre travail dans un texte à venir.

CHAPITRE V

RECONSTRUCTION D'ESPACES À PARTIR DES INTERSECTIONS

Dans ce chapitre nous montrons comment le calcul d'intersections d'espaces $\mathbf{M}_\nu$, $\nu \to \mu$, permet de reconstruire les espaces $\mathbf{M}_\mu$ aux complets. Cette partie du travail reproduit une partie de l'article: "Science fiction and Macdonald's polynomials", de F. Bergeron et A. Garsia, où on retrouve une heuristique pour construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_\mu$ à partir de bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$,..., $\mathcal{B}_m$ pour les modules $\mathbf{M}_i$,

$$\mathbf{M}_i := \mathbf{M}_{\alpha_i},$$

où α_i est le partage obtenu de μ en lui enlevant son $i^{\text{ième}}$ coin, selon l'ordre de haut en bas, en supposant que les bases $\mathcal{B}_i$ satisfont certaines relations de compatibilité. Notre travail a été utilisé pour produire explicitement ces bases $\mathcal{B}_i$. De plus, nous verrons que cela donne une approche pour une démonstration récursive de la conjecture $n!$. On commence par donner quelques concepts généraux puis, on étudie le cas où notre partage μ a au moins 3 coins et plus précisément, le cas $\mu = 321$. Tout au long de ce chapitre, on considère μ comme un partage de $n+1$.

5.1 Généralités

Définition 5.1.1 L'espace $\mathbf{M}_\mu$ possède un "automorphisme", appelé $\mathbf{flip}_\mu$, qu'on définit comme suit:

$$\mathbf{flip}_\mu\, P = P(\partial X, \partial Y)\Delta_\mu(X,Y) = P(\partial)\Delta_\mu(X,Y), \tag{1}$$

pour $P \in \mathbf{M}_\mu$.

$\mathbf{Flip}_\mu$ "tord" les composantes irréductibles de $\mathbf{M}_\mu$ par le signe et complémente le degré des polynômes bihomogènes par rapport à $(n(\mu'), n(\mu))$.

Il découle de la définition de $\mathbf{M}_\mu$ que sa caractéristique de Frobénius, $\mathcal{C}_\mu(X; q, t)$, satisfait à l'identité:

$$\mathcal{C}_\mu(X; q, t) = T_\mu\, \omega\, \mathcal{C}_\mu(X; q^{-1}, t^{-1}), \tag{2}$$

où ω est l'involution qui envoie s_λ sur $s_{\lambda'}$.

Définition 5.1.2 On définit $\mathbf{flip}_\mu M$, pour M un sous-module bigradué de $\mathbf{M}_\mu$, de la façon suivante:

$$\mathbf{flip}_\mu M := \mathcal{L}[\mathbf{flip}_\mu P \mid P \in M].$$

$\mathbf{Flip}_\mu M$ est un sous-module bigradué de $\mathbf{M}_\mu$. Si on dénote par $\psi(x; q, t)$ la caractéristique de Frobenius de M, alors la *caractéristique de Frobenius de* $\mathbf{flip}_\mu M$ est donnée par la formule suivante:

$$\mathcal{F}(\mathbf{flip}_\mu M) = T_\mu \downarrow \psi(x; q, t), \tag{3}$$

où on pose $\downarrow \psi(x; q, t) := \omega\psi(x; q^{-1}, t^{-1})$.

Définition 5.1.3 Soit $\pi(\mu)$ l'ensemble des prédécesseurs de μ (voir déf. 4.2.2). Pour chaque $\nu_i \in \pi(\mu)$, dénotons par $\mathbf{flip}_i$, l'opérateur **flip** par rapport à l'espace $\mathbf{M}_{\nu_i}$ et par $\downarrow_i$ son effet sur la caractéristique de Frobenius des sous-modules bigradués de $\mathbf{M}_{\nu_i}$.
Si $\psi(x; q, t)$ est une telle caractéristique, alors on a

$$\downarrow_i \psi(x; q, t) = T_i \downarrow \psi(x; q, t), \tag{4}$$

où on écrit T_i pour $T_{\nu_i}(q, t)$.

Définition 5.1.4 Pour un mot $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m$, avec $\varepsilon_i = 0, 1$, on pose:

$$\mathbf{M}_1^\varepsilon = \bigcap_{\substack{i \\ \varepsilon_i = 1}} \mathbf{M}_{\nu_i}, \quad \mathbf{M}_0^\varepsilon = \sum_{\substack{i \\ \varepsilon_i = 0}} \mathbf{M}_{\nu_i} \quad \text{et}$$

$$\mathbf{M}^\varepsilon \;=\; \mathbf{M}_1 \cap (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_0)^\perp.$$

Définition 5.1.5 On désigne par τ_i l'opérateur sur les mots de 0 et de 1 qui complémente toutes les lettres, sauf la i^{ieme}. En d'autres mots, si on pose $\tilde{\varepsilon}_i = 1 - \varepsilon_i$, on a

$$\tau_i(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_m) := \tilde{\varepsilon}_1 \cdots \tilde{\varepsilon}_{i-1}\varepsilon_i\tilde{\varepsilon}_{i+1} \cdots \tilde{\varepsilon}_m.$$

Définition 5.1.6 Il existe un produit scalaire naturel $<,>$ sur l'espace des polynômes en $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$, qui est défini comme suit:

$$\langle P, Q\rangle := P(\partial x, \partial y)Q(x, y)\mid_{x=y=0}.$$

On peut montrer que le complément orthogonal de l'espace $\mathbf{M}_\mu$ consiste en l'idéal

$$\mathcal{I}_\mu = \{P(x, y) \mid P(\partial x, \partial y)\Delta_\mu(x, y) = 0\}.$$

Définition 5.1.7 Soit μ un partage. On définit l'espace suivant:

$$V_\mu := \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{M}_{\alpha_i},$$

où $\alpha_i \in \pi(\mu)$.

Heuristique 5.1.1 (*Bergeron-Garsia*)

Pour chaque partage μ, il existe une base $\mathcal{B}_\mu$ de polynômes homogènes de V_μ qui satisfait les 5 propriétés suivantes:

1. *Pour chaque $1 \le i \le m$, on a un sous-ensemble $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ tel que*

$$\mathbf{M}_{\alpha_i} = \mathcal{L}[\mathcal{B}_i].$$

2. *L'espace $\mathbf{M}^\varepsilon_\mu = \mathcal{L}[\mathcal{B}^\varepsilon_\mu]$ est un $\mathcal{S}_n$-module bigradué. Sa caractéristique de Frobenius est*

$$\Phi^\varepsilon_\mu(x; q, t) = \mathcal{F}(\mathbf{M}^\varepsilon_\mu).$$

Notons que si on pose

$$\mathbf{M}^1_{\alpha_i} := \mathcal{L}[\mathcal{B}_i] = \mathbf{M}_{\alpha_i} \quad , \quad \mathbf{M}^0_{\alpha_i} := \mathcal{L}[\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i],$$

alors on a que

$$\mathbf{M}_\mu^\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{M}_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}.$$

3. *Pour tous les mots* $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m$ *tel que* $\varepsilon_i = 1$, *on a*

$$\mathbf{flip}_i\, \mathbf{M}_\mu^\varepsilon \simeq \mathbf{M}_\mu^{\tau_i\varepsilon}.$$

On a aussi que la caractéristique de Frobenius $\Phi_\mu^\varepsilon(x;q,t)$ *satisfait:*

$$\downarrow_i \Phi_\mu^\varepsilon = \Phi_\mu^{\tau_i\varepsilon}.$$

4. *Pour chaque* $\mu \vdash n+1$, *avec* m *parts et pour n'importe quel sous-ensemble* S *de* $\{1,2,\ldots,m\}$, $\mid S \mid = k$, *on a*

$$\dim \bigcap_{i\in S} \mathbf{M}_{\alpha_i} = \frac{n!}{k}.$$

5. *Pour chaque* $i = 1,\ldots,m$, *la collection* $\mathcal{B}/\mathcal{B}_i$ *est contenue dans* $\mathcal{I}_{\alpha_i}$. *En particulier, quand* $\varepsilon_i = 0$, *on doit avoir*

$$\mathbf{M}_\mu^\varepsilon \subseteq \mathbf{M}_i{}^\perp,$$

où $\perp$ *représente l'opérateur qui consiste à prendre le complément orthogonal par rapport au produit scalaire défini précédemment.*

Remarque: Les relations de compatibilité pour les bases $\mathcal{B}_i$ correspondent aux points 1, 3 et 5 de l'heuristique.

On construit la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_\mu$, $\mu \vdash n+1$, en posant:

$$\mathcal{B} := \sum_{(c,d)\in\mu} \partial x^c\, \partial y^d\, \mathbf{flip}_\mu\, \mathcal{B}_{(c,d)}, \tag{5}$$

où chaque (c,d) est une case de μ, $x := x_{n+1}$, $y := y_{n+1}$ et où les $\mathcal{B}_{(c,d)}$ sont des bases de modules associés à chaque case de μ d'une certaine façon que nous illustrerons pour le cas à trois coins. $\mathcal{B}$ contient bien $(n+1)!$ éléments mais il reste à montrer qu'ils sont linéairement indépendants, en toute généralité.

5.2 3 coins

Pour mieux comprendre les définitions et la conjecture décrite dans la section 1, considérons le cas général d'un partage μ à 3 coins.
La propriété 1 affirme que l'espace

$$V_\mu = \mathbf{M}_{\alpha_1} \cup \mathbf{M}_{\alpha_2} \cup \mathbf{M}_{\alpha_3}$$

a une base $\mathcal{B}$, avec trois sous-ensembles $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ tels que

$$\mathbf{M}_{\alpha_1} = \mathcal{L}[\mathcal{B}_1]\,, \quad \mathbf{M}_{\alpha_2} = \mathcal{L}[\mathcal{B}_2]\,, \quad \mathbf{M}_{\alpha_3} = \mathcal{L}[\mathcal{B}_3]\,.$$

De plus, chacun de ces sous-ensembles s'écrit comme une union disjointe:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^{100} + \mathcal{B}^{110} + \mathcal{B}^{101} + \mathcal{B}^{111},$$

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}^{010} + \mathcal{B}^{110} + \mathcal{B}^{011} + \mathcal{B}^{111},$$

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}^{001} + \mathcal{B}^{011} + \mathcal{B}^{101} + \mathcal{B}^{111},$$

où,

$$\mathcal{B}^{100} = \mathcal{B}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_3,$$

$$\mathcal{B}^{110} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_3,$$

$$\mathcal{B}^{101} = \mathcal{B}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2 \cap \mathcal{B}_3,$$

$$\mathcal{B}^{111} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3,$$

$$\mathcal{B}^{010} = \widetilde{\mathcal{B}}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_3,$$

$$\mathcal{B}^{011} = \widetilde{\mathcal{B}}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3,$$

$$\mathcal{B}^{001} = \widetilde{\mathcal{B}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2 \cap \mathcal{B}_3,$$

avec $\widetilde{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i$.

On peut résumer ces informations sur les relations de compatibilité des bases $\mathcal{B}_i$, via le diagramme de Venn suivant:

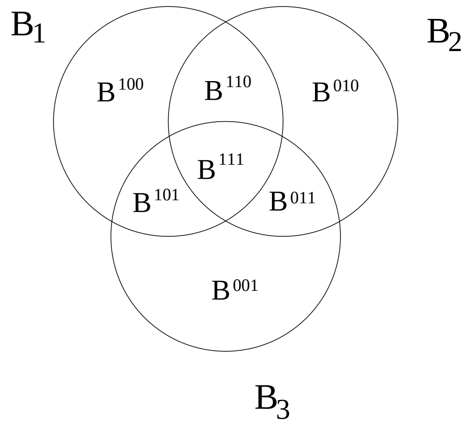


Figure 5.1: Décomposition de bases avec 3 coins

Par abus de notation, on utilise le même diagramme pour représenter les différents sous-espaces $\mathrm{M}_\mu^\varepsilon$. On peut donc représenter les propriétés 2 et 3 au moyen du diagramme suivant:

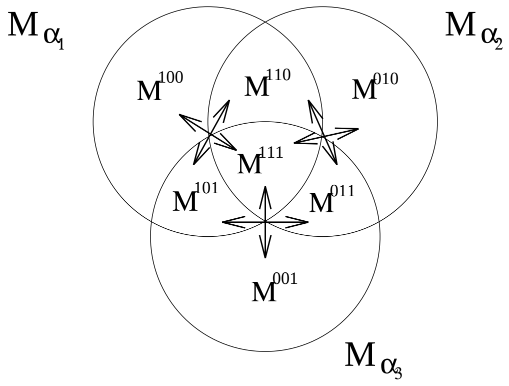


Figure 5.2: Décomposition d'espace et **flip** avec 3 coins

Chaque région correspond à un sous-espaces $\mathcal{S}_n$-invariant et les flèches représentent les effets des **flip** correspondants. On peut ainsi déduire que:

$$a)\mathbf{flip}_1\,\mathrm{M}^{100} \simeq \mathrm{M}^{111} \qquad a')\mathbf{flip}_1\,\mathrm{M}^{111} \simeq \mathrm{M}^{100}$$

$$b)\mathbf{flip}_1\,\mathrm{M}^{110} \simeq \mathrm{M}^{101} \qquad b')\mathbf{flip}_1\,\mathrm{M}^{101} \simeq \mathrm{M}^{110}$$

$$c)\mathbf{flip}_2\,\mathbf{M}^{110} \simeq \mathbf{M}^{011} \qquad c')\mathbf{flip}_2\,\mathbf{M}^{011} \simeq \mathbf{M}^{110} \tag{$*$}$$

$$d)\mathbf{flip}_2\,\mathbf{M}^{010} \simeq \mathbf{M}^{111} \qquad d')\mathbf{flip}_2\,\mathbf{M}^{111} \simeq \mathbf{M}^{010}$$

$$e)\mathbf{flip}_3\,\mathbf{M}^{101} \simeq \mathbf{M}^{011} \qquad e')\mathbf{flip}_3\,\mathbf{M}^{011} \simeq \mathbf{M}^{101}$$

$$f)\mathbf{flip_3}\,\mathbf{M}^{001} \simeq \mathbf{M}^{111} \qquad f')\mathbf{flip}_3\,\mathbf{M}^{111} \simeq \mathbf{M}^{001}$$

Donc, si on trouve une base pour $\mathbf{M}^{111}$ et une base pour $\mathbf{M}^{110}$, on aura, via ces relations, des bases pour chacun des sous-espaces $\mathbf{M}^{\varepsilon}$. (Notre approche, décrite au chapitre 4, permet d'obtenir des bases pour $\mathbf{M}^{111}$ et $\mathbf{M}^{111} \vee \mathbf{M}^{110}$).

Les relations $(*)$ donnent des identités concernant les caractères bigradués des modules $\mathbf{M}^{\varepsilon}$. Par exemple, $b')$, $c)$ et $e')$ nous donnent les identités suivantes:

1. $T_1 \downarrow \Phi^{101} = \Phi^{110}$,
2. $T_2 \downarrow \Phi^{110} = \Phi^{011}$,
3. $T_3 \downarrow \Phi^{011} = \Phi^{101}$,

où $T_i := T_{\alpha_i} = q^{n(\alpha_i')}t^{n(\alpha_i)}$. En combinant 1 et 2, et 2 et 3 on obtient les deux relations suivantes:

$$\Phi^{011} = T_2 \downarrow T_1 \downarrow \Phi^{101} = \frac{T_2}{T_1}\Phi^{101}, \quad \Phi^{101} = T_3 \downarrow T_2 \downarrow \Phi^{110} = \frac{T_3}{T_2}\Phi^{110}. \tag{6}$$

Ces relations donnent:

$$T_1\Phi^{011} \,=\, T_2\Phi^{101} \,=\, T_3\Phi^{110}.$$

Si on dénote par $\Phi^{(2)}$ cette valeur commune, on peut écrire

$$\Phi^{011} \,=\, \frac{\Phi^{(2)}}{T_1}, \quad \Phi^{101} \,=\, \frac{\Phi^{(2)}}{T_2}, \quad \Phi^{110} \,=\, \frac{\Phi^{(2)}}{T_3}.$$

De même, en utilisant $a')$, $d')$ et $f')$, on obtient:

$$T_1 \downarrow \Phi^{111} \,=\, \Phi^{100}, \quad T_2 \downarrow \Phi^{111} \,=\, \Phi^{010}, \quad T_3 \downarrow \Phi^{111} \,=\, \Phi^{001}.$$

On pose alors $\Phi^{(1)} := T_1\,T_2\,T_3 \downarrow \Phi^{111}$, et on a:

$$\Phi^{100} \,=\, \frac{\Phi^{(1)}}{T_2\,T_3}, \quad \Phi^{010} \,=\, \frac{\Phi^{(1)}}{T_1\,T_3}, \quad \Phi^{001} \,=\, \frac{\Phi^{(1)}}{T_1\,T_2}. \tag{7}$$

Plus généralement, on peut montrer que

$$\Phi^{\varepsilon}_{\mu} \;=\; \frac{\Phi^{|\varepsilon|}}{\prod_{\varepsilon_i \neq 0} T_i},$$

pour un certain $\Phi^{|\varepsilon|}$ avec $|\varepsilon| = \sum \varepsilon_i$.

Remarquons maintenant que la partie 2 de l'heuristique implique que les $\mathbf{M}_{\alpha_i}$ se décomposent en $\mathcal{S}_n$-sous-modules invariants, de la manière suivante (voir figure 5.2):

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\alpha_1} &= \mathbf{M}^{100} \oplus \mathbf{M}^{101} \oplus \mathbf{M}^{110} \oplus \mathbf{M}^{111},\\
\mathbf{M}_{\alpha_2} &= \mathbf{M}^{010} \oplus \mathbf{M}^{110} \oplus \mathbf{M}^{011} \oplus \mathbf{M}^{111},\\
\mathbf{M}_{\alpha_3} &= \mathbf{M}^{001} \oplus \mathbf{M}^{101} \oplus \mathbf{M}^{011} \oplus \mathbf{M}^{111}.
\end{aligned} \tag{8}$$

ou plus généralement:

$$\mathbf{M}_{\alpha_i} \;=\; \bigoplus_{\substack{\varepsilon \\ \varepsilon_i = 1}} \mathbf{M}^{\varepsilon}_{\mu}.$$

Naturellement, toutes ces relations impliquent des relations pour les caractéristiques de Frobenius associées. Ainsi, les relations (8) combinées avec (6) et (7) donne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{M}_{\alpha_1}) &= \frac{1}{T_2 T_3}\Phi^{(1)} + \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)\Phi^{(2)} + \Phi^{(3)},\\
\mathcal{F}(\mathbf{M}_{\alpha_2}) &= \frac{1}{T_1 T_3}\Phi^{(1)} + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_3}\right)\Phi^{(2)} + \Phi^{(3)},\\
\mathcal{F}(\mathbf{M}_{\alpha_3}) &= \frac{1}{T_1 T_2}\Phi^{(1)} + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\Phi^{(2)} + \Phi^{(3)},
\end{aligned}$$

où on a posé $\Phi^{111} := \Phi^{(3)}$. Notons de plus que la non singularité du **flip** combinée avec les relations $(*)$ implique que

$$\begin{aligned}
&\dim \mathbf{M}^{100} = \dim \mathbf{M}^{010} = \dim \mathbf{M}^{001} = \dim \mathbf{M}^{111} \quad \text{et}\\
&\dim \mathbf{M}^{110} = \dim \mathbf{M}^{101} = \dim \mathbf{M}^{011}.
\end{aligned}$$

Appelons d_1 la première dimension commune et d_2, la seconde alors, n'importe laquelle des équations de (8) entraine que

$$n! \;=\; 2d_1 \,+\, 2d_2.$$

Si on considère maintenant la partie 4 de l'heuristique, qui affirme que $\dim \mathbf{M}^{111} \;=\; n!/3$, on obtient

$$d_1 = \frac{n!}{3} \qquad \text{et} \qquad d_2 = \frac{n!}{6}. \tag{9}$$

Maintenant, comme $\mathbf{M}_{\alpha_1} \cap \mathbf{M}_{\alpha_2} = \mathbf{M}^{110} + \mathbf{M}^{111}$, on peut déduire de (9) que

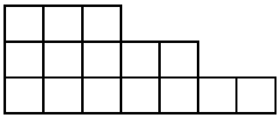
$$\dim \mathbf{M}_{\alpha_1} \cap \mathbf{M}_{\alpha_2} = \frac{n!}{2},$$

ce qui montre que dans ce cas, la partie 4 de l'heuristique a du sens.

Maintenant, voyons comment construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_\mu$, voir (5), pour le cas particulier où μ a trois coins. Supposons que $\pi(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ et posons

$$\mathbf{M}_i := \mathbf{M}_{\alpha_i}.$$

Illustrons la construction de $\mathcal{B}$ avec le partage $\mu = 753$.

$\mu :=$ 

Comme on l'a déjà annoncé, on construit la base $\mathcal{B}$ en posant pour chaque $(c, d) \in \mu$,

$$\mathcal{B} := \sum_{(c,d)\in\mu} \partial x^c\, \partial y^d\, \mathbf{flip}_\mu\, \mathcal{B}_{(c,d)},$$

où $\mathcal{B}_{(c,d)}$ est obtenu de la façon suivante:
Dans les cases de la troisième ligne (de bas en haut), on pose $\mathcal{B}_{(c,d)} = \mathbf{M}_1$. Pour trouver les bases associées aux cases des autres lignes, on suit la règle suivante:

1. Si la prochaine part du partage pour laquelle on cherche les bases contient k cases, alors on place sur une ligne les entrées de la part supérieur, suivi du nombre de zéros nécessaires pour que la ligne contienne k éléments.

2. On fait l'union de la ligne construite à l'étape 1 avec une autre ligne contenant k éléments et construite comme suit: On place les entrées de la part supérieur à la toute fin de la ligne à k éléments, précédé du nombre de 1 nécessaire. Ensuite, on intersecte tous les éléments de cette ligne avec $\mathbf{M}_i$, i étant la position de la ligne dans le partage en partant d'en bas.

Dans notre exemple, on doit donc faire le calcul suivant, pour trouver les bases associées aux cases de la deuxième ligne de μ:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_1 & 0 & 0 & & \\
 & & \cup & & & & \\
(1 & 1 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_1) & \cap & \mathbf{M}_2
\end{array}
$$

$$
= \quad (\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2) \quad (\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2) \quad \mathbf{M}_1 \quad (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \quad (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2)
$$

On procède de la même façon pour obtenir les bases associées aux cases de la troisième ligne et alors, on obtient:

$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_1$				
$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$		
$(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2) \cup \mathbf{M}_3$	$(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2) \cup \mathbf{M}_3$	$(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2) \cap \mathbf{M}_3$	$(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cup (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3) \cup (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3)$	$(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cup (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3)$	$(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cap \mathbf{M}_3$	$(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cap \mathbf{M}_3$

Figure 5.3: Entrées associées à chaque case du partage 753

où l'entrée $\mathbf{M}_i$ dans une case signifie qu'on associe à cette case une base de $\mathbf{M}_i$. En utilisant la formule (5) on obtient alors la base $\mathcal{B}$ cherchée.

5.3 Le cas $\mu = 321$

Considérons le cas $\mu = 321$ en détails. On commence par trouver une base pour

$$V_{321} = \mathbf{M}_{32} \cup \mathbf{M}_{221} \cup \mathbf{M}_{311}.$$

Pour ce faire, il faut trouver une base pour $\mathbf{M}_{32}$, $\mathbf{M}_{221}$ et $\mathbf{M}_{311}$. Décomposons donc nos espaces commes on l'a vu précédemment:

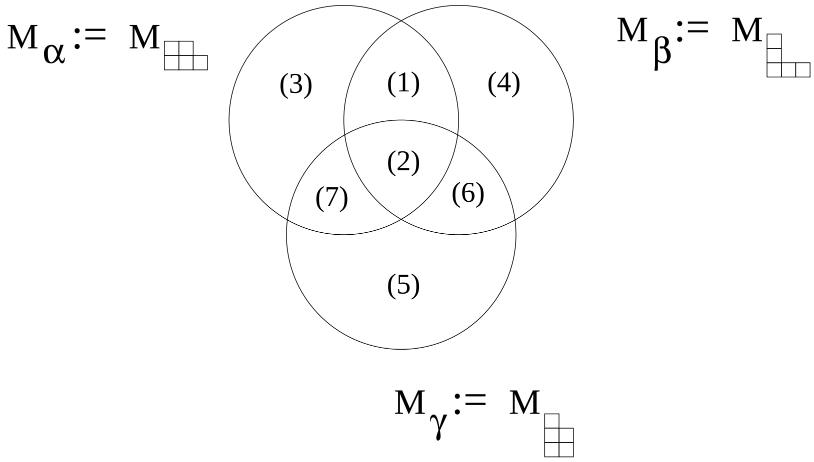


Figure 5.4: Intersection des espaces $\mathbf{M}_{32}$, $\mathbf{M}_{221}$ et $\mathbf{M}_{311}$

Notre approche pour calculer les bases d'intersections nous permet de trouver une base pour le morceau (2), ci-dessous:

$$(2) := \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta \cap \mathbf{M}_\gamma = \mathcal{L}_\partial[\, \sigma \cdot \boxplus \cdot \square\square,\ \sigma \cdot \boxplus \cdot \boxminus].$$

À partir de cette intersection, on peut trouver des bases pour les morceaux (3), (4) et (5), en procédent comme suit:

$$\begin{aligned}
(3) &:= \mathbf{flip}_\alpha\,(2), \\
(4) &:= \mathbf{flip}_\beta\,(2), \\
(5) &:= \mathbf{flip}_\gamma\,(2).
\end{aligned}$$

Pour les morceaux (1), (6) et (7) les choses sont un peu plus compliquées. (Voir l'article (Bergeron F. - Garsia, 1997) pour plus de détails.) Par exemple, pour trouver une base de (1), on utilise, par exemple, le genre d'opération suivante:

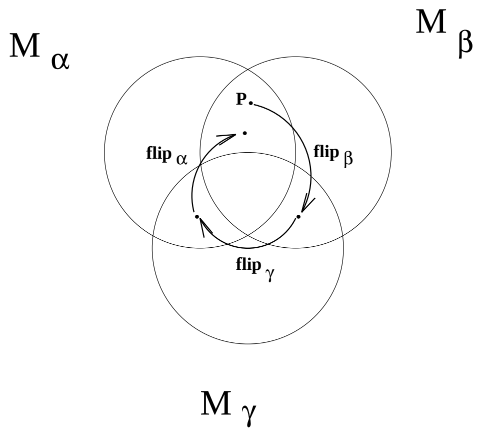


Figure 5.5: Trois **flip**

Pour chaque morceau, les dimensions des bases trouvées sont alors bien:

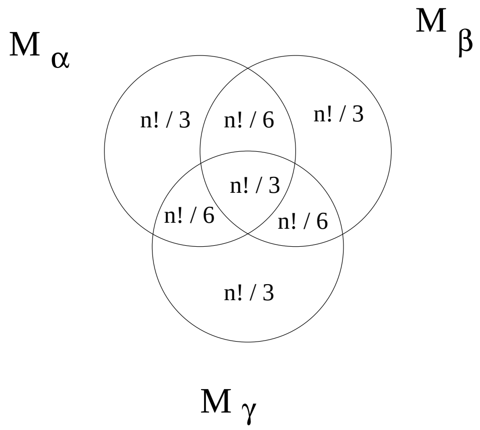


Figure 5.6: Dimension des différentes parties de l'intersections

et on vérifie que tous les morceaux sont linéairement indépendants entre eux. On voit que la conjecture 4.2.1 de Bergeron-Garsia est vérifiée dans ce cas puisque qu'on a

$$\dim \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta \cap \mathbf{M}_\gamma \; = \; n!/3 \qquad \text{et}$$

$$\dim \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\beta \; = \; \dim \mathbf{M}_\alpha \cap \mathbf{M}_\gamma \; = \; \dim \mathbf{M}_\beta \cap \mathbf{M}_\gamma \; = \; n!/2.$$

En additionnant toutes ces dimensions, on obtient

$$\frac{4n!}{3} + \frac{3n!}{6} = \frac{11n!}{6},$$

éléments indépendants. Maintenant qu'on a une base pour chacun des morceaux, on peut utiliser la "recette" de la section précédente, pour trouver les bases associées aux cases de μ, et trouver les $6n!$ éléments qui formeront notre base pour $\mu = 321$, si on réussit à démontrer l'indépendance entre ces éléments. La recette donne:

$\mathbf{M}_1$		
$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$	
$(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2) \cup \mathbf{M}_3$	$(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cup (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3) \cup (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3)$	$(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cap \mathbf{M}_3$

Figure 5.7: Entrées associées à chaque case du partage 321

où l'entrée $\mathbf{M}_i$ dans une case signifie qu'on associe à cette case une base de $\mathbf{M}_i$. On peut observer aussi que pour le remplissage de cases spécifié à la figure 5.7, il n'est pas nécessaire de produire une décomposition aussi fine de l'union des $\mathbf{M}_i$. On constate en effet qu'il suffit d'avoir produit des bases pour les intersections $\cap_{\alpha \in A} \mathbf{M}_\alpha$ $(A \subseteq \pi(\mu))$ puisque les seules opérations qui interviennent dans cette construction sont des unions et des intersections. Ceci souligne davantage l'intérêt de notre travail.

On construit alors la base pour $\mathbf{M}_\mu$ avec la formule (5):

$$\mathcal{B} := \sum_{(c,d) \in \mu} \partial x^c \, \partial y^d \, \mathbf{flip}_\mu \, \mathcal{B}_{(c,d)}.$$

On a, de plus que les dimensions de ces bases sont:

n!		
9n!/6	n!/2	
11n!/6	5n!/6	n!/3

Figure 5.8: Dimension de chaque espace associée aux cases du partage 321

ce qui nous donne bien

$$|\mathcal{B}| = n! + \frac{9n!}{6} + \frac{n!}{2} + \frac{11n!}{6} + \frac{5n!}{6} + \frac{n!}{3} = 6n!\,,$$

si on arrive à prouver l'indépendance deux à deux des composantes $\partial x^c\,\partial y^d\,\mathbf{flip}_\mu\,\mathcal{B}_{(c,d)}$, pour les $(c,d) \in \mu$.

CONCLUSION

La principale contribution de ce travail consiste en la construction de bases explicites pour l'intersection de certains modules de polynômes diagonalement harmoniques, $\mathbf{M}_\nu(X,Y)$:

$$\mathbf{M}_A := \bigcap_{\nu\in A} \mathbf{M}_\nu,$$

où $A \subseteq \pi(\mu)$ = l'ensemble des prédécesseurs d'un partage μ. L'intérêt de ce calcul explicite est de contribuer (voir chapitre 5) à une approche récursive de la démonstration de la conjecture $n!$ concernant ces modules, à savoir que

$$\dim(\mathbf{M}_\mu) = n!,$$

si μ est un partage de l'entier n.

Nous avons obtenu des résultats nouveaux et des nouvelles conjectures permettant de décrire explicitement ces intersections. La principale de ces conjectures est que:

> $\mathbf{M}_A$ *est pyramidal et son sommet est engendré par des composantes irréductibles particulièrement simples.*

Il est intéressant de remarquer que toutes nos conjectures et résultats sont aussi valides lorsqu'au lieu de considérer un sous-ensemble de *prédécesseurs* de μ, on considère un sous-ensemble de *successeurs* de μ.

Une partie des travaux exposés ici font l'objet d'un article conjoint avec François Bergeron, dont le titre est:

"*Intersections of Modules related to Macdonald's Polynomials*"

Plusieurs généralisations et extensions de ce travail sont présentement en cours, en particulier pour la caractérisation des opérateurs différentiels qui produisent des éléments cycliques du sommet des intersections et de conjectures s'y rattachant ou pour l'étude de diagrammes plus généraux, c'est-à-dire des ensembles de couples d'entiers positifs.

APPENDICE A

PROCÉDURES MAPLE ET EXEMPLES D'UTILISATION

Cette section contient la description des procédures MapleV qui ont été utilisées pour mieux comprendre et pour travailler avec les espaces $\mathbf{M}_A$. Ces procédures ont été, en partie écrites ou améliorées par François Bergeron et il est possible d'en avoir une copie en envoyant un e-mail à *hamel@math.uqam.ca*.

A.1 Fonctions sur les diagrammes

- **B**mu : Cette procédure permet de calculer B_μ:

$$B_\mu := \sum_{c \in \mu} q^{a'(c)} t^{l'(c)},$$

  où $a'(c)$ représente la première coordonnée de la case c et $l'(c)$, la seconde.

- **bras:** Cette procédure calcul le bras (voir définition 1.1.4) d'une case c de μ.

```
bras:=proc(c,mu)
        mu[(c[2]+1)]-(c[1]+1);
      end:
```

- **cases:** Cette procédure associe à un partage μ l'ensemble des coordonnées des cases de μ.

```
cases:=mu->[seq(seq([j-1,i-1],j = 1 .. mu[i]),
                           i = 1 .. nops(mu))];
```

```
> cases([3,1]);
```

$$[[0,0],[1,0],[2,0],[0,1]]$$

- **coins:** Cette procédure donne les coordonnées usuelles des coins d'un partage:

```
coins:=proc(mu)
        n := nops(mu); rep := [];
        for i to n-1 do
          if mu[i+1] < mu[i] then
            rep := [op(rep),[i,mu[i]]]
          fi od;
        [op(rep),[n,op(n,mu)]]
       end:
```

```
> coins([3,2,1,1]);
```

$$[[1, 3], [2, 2], [4, 1]]$$

- **conjugue:** Cette procédure donne le conjugué μ' (voir définition 1.1.3) d'un partage μ donné:

```
>conjugue([2,1,1]);
```

$$[3, 1]$$

- **Delta:** Cette procédure calcul Δ_d.

```
Delta:=proc(d,V)
        if nargs=1 then
          Delta(d,[seq(i,i=1..nops(d))])
        else VdeM(d,V)
        fi;
       end:
```

où d est l'ensemble des cases d'un diagramme et V est l'ensemble ordonné des indices pour les variables (facultatif).

- **enlevecoin:** Cette procédure enlève un coin à un partage:

```
enlevecoin:=proc(c,nu)
             if c[2] = 1 then [op(1 .. nops(nu)-1,nu)]
             else subsop(c[1] = c[2]-1,nu)
             fi
            end:
```

```
> enlevecoin([2,2],[3,2,1]);
```

$$[3, 1, 1]$$

- **jambe:** Cette procédure calcul la jambe (voir définition 1.1.4) d'une case c de μ.

```
jambe:=(c,mu)->bras(([c[2],c[1]]),conjugue(mu));
```

- **nmu:** Cette procédure permet de calculer $n(\mu)$:

$$n(\mu) := \sum_{i\geq 1} \mu_i(i-1).$$

- **Par:** Procédure du package SF de MapleV qui donne tous les partages d'un entier n dans l'ordre lexicographique:

```
>Par(6);
```

$$[[6],[5,1],[4,2],[4,1,1],[3,3],[3,2,1],[3,1,1,1], \\ [2,2,2],[2,2,1,1],[2,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1]]$$

- **predecesseurs:** Cette procédure donne tous les partages obtenus en enlevant un des coins d'un partage donné:

```
predecesseurs:=proc(nu)
                  map(enlevecoin,coins(nu),nu)
                end:

> predecesseurs([3,2,1]);
```

$$[[2,2,1],[3,1,1],[3,2]]$$

- **sansconjugue:** Cette procédure donne une liste de partage de n sans partage conjugué entre eux:

```
sansconjugue:=proc(liste)
               rep:=[ ];
                for l in liste do
                 if not(member(conj(l),rep)) then
                   rep:=[op(rep),l]
                 fi
                od;
                rep;
              end;

> sansconjugue(Par(4));
```

$$[[4],[3,1],[2,2]]$$

Ceci permet de restreindre le nombre de cas à étudier lorsqu'on connaît des propriétés de symétrie selon la conjugaison.

- **Tmu** : Cette procédure calcule T_μ:

$$T_\mu = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)}.$$

- **VdeM:** Vandermonde.

```
VdM:=proc(d,V):
      if d=[] then 0
      else n:=nops(d);
           det(matrix(map(proc(c,n,V) local i;
           [seq(x[V[i]]^c[1]*y[V[i]]^c[2],i=1..n)] end,d,n,V)))
      fi; end:
```

où d et V sont définis comme dans la procédure Delta.

A.2 Fonctions symétriques

Pour les calculs avec les fonctions symétriques, on utilise ici le package Maple, SF, de J.Stembridge. Toutes les fonctions qui ne sont pas définies ici font donc partie du package SF.

- **del:** L'opérateur $\partial_f(g)$ est le dual, pour le produit scalaire usuel, de la multiplication par f.

```
del:=proc(f,g)
      if f=1 or f=s[] then g
      else
        d:=SFdeg(tos(g)):
        rep:=0:
        for nu in Par(d - SFdeg(tos(f))) do
            rep:=rep+scalar(g,f*s[op(nu)])*s[op(nu)]
        od;
        rep;
      fi;
     end:
```

- **lambda:** La fonction **lambda** permet les λ-substitutions $p_k \to f(k)$.

```
lambda:=proc(expr,f) global s;
         poly:=top(expr);
         d:=varset(poly,'p');
          map(factor,
             tos(subs({seq(cat('p',j)=f(j),j=1..d)},poly)));
          subs(s[]=1,'');
        end:
```

- **SFdeg:** Calcul le degré d'un polynôme symétrique.

```
SFdeg:=proc(f)
         if whattype(f)=`+`
              then max(op(map(SFdeg,convert(f,list))))
         elif whattype(f)=`*`
              then map(SFdeg,f)
         elif whattype(f)=indexed and op(0,f)=s
              then convert([op(f)],`+`)
         else 1
         fi;
       end;
```

A.3 Espace de polynômes bivariés

- **bidegre:** Cette procédure donne le bidegré d'un polynôme à n variables en x et en y.

- **bihomogene:** Cette procédure donne les parties bihomogènes d'un bidegré b donné de chaque élément d'un ensemble de polynômes B.

```
bihomogene:=(B,b)->{op(map(composante,B,b))} minus {0}:
```

- **bimonome:** Cette procédure donne tous les monômes de bidegré (h, k) en les variables $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$, dans l'ordre lexicographique correspondant à l'ordre $x_1 < y_1 < x_2 < \cdots$ sur les variables.

```
bimonome:=proc(h,k,n)
          map((my,h,k,n) -> op(map((mx,my,n)
              -> mx*my,monome(h,x,1,n),my,n)),
                   monome(k,y,1,n),h,k,n);
          map(sort,")
          end:
```

```
> bimonome(2,1,3);
```

$$\left[y_1\,{x_1}^2,\ y_1\,x_1\,x_2,\ y_1\,x_1\,x_3,\ y_1\,{x_2}^2,\ y_1\,x_2\,x_3,\ y_1\,{x_3}^2,\ y_2\,{x_1}^2,\ y_2\,x_1\,x_2,\ y_2\,x_1\,x_3,\ y_2\,{x_2}^2,\ y_2\,x_2\,x_3,\ y_2\,{x_3}^2,\ y_3\,{x_1}^2,\ y_3\,x_1\,x_2,\ y_3\,x_1\,x_3,\ y_3\,{x_2}^2,\ y_3\,x_2\,x_3,\ y_3\,{x_3}^2\right]$$

- **coefficient:** Cette procédure permet d'extraire le coefficient d'un certain monôme dans un polynôme.

```
>coefficient(x[1]^2*x[2],x[1]^3*x[2]+3*x[1]^2*x[2],2);
```

$$3$$

- **composante:** Cette procédure donne la composante bihomogène de bidegré b d'un polynôme B.

```
composante:=proc(pol,b)
             if whattype(pol) = `+` then
              rep:=map(proc(terme,b)
                    if bidegre(terme) = b then terme
                    else 0  fi end, pol, b)
             elif bidegre(pol) = b then rep:=pol
             else rep:=0 fi;
             rep; end:
```

- **deg:** Cette procédure donne le degré d'un polynôme en une certaine famille de variables:

```
deg:=proc(pol,v)
      if whattype(pol) = integer then 0
      else degree(pol,{seq(v[i], i=1 .. max_var(pol))})
      fi; end:
```

où v est le nom d'une famille de variables.

```
>deg(x_[1]^2*y[1]*x[2]^3*y[4],y);
```

$$2$$

- **derive:** Cette procédure calcule l'effet d'un polynôme oper, considéré comme opérateur différentiel, sur un polynôme pol.

```
derive:=proc(oper,pol)
         if whattype(oper) = `+` then map(derive,oper,pol);
         elif whattype(oper) = indexed and
              (op(0,oper) = x or op(0,oper) = y) then
              diff(pol,oper);
         elif whattype(oper) = `^` and
              whattype(oper) = indexed and
              (op(0,oper) = x or op(0,oper) = y) then
                    diff(pol,op(1,oper)^op(2,oper));
         elif whattype(oper) = `^` then
                        derive(factor(oper/op(1,oper)),
                        derive(op(1,oper)^(op(2,oper)-1),pol));
         elif whattype(oper) = `*` then
                        derive(factor(oper/op(1,oper)),
                        derive(op(1,oper),pol));
         elif whattype(pol) = integer and 0 < degree(oper)
         then 0;
         else oper*pol  fi;
        end:
```

```
 >derive(x[1]*y[1],
          x[1]^2+x[2]*x[1]*y[1]+4*y[4]*x[1]^2+3*x[1]^3*y[1]^2);
```

$$x_2 + 18x_1^2y_1$$

- **envect:** Cette procédure transforme en vecteur un polynôme:

```
envect:=proc(pol,N)
         if whattype(pol) = integer then [pol]
         else
           bin:=bidegre(pol);
           map(coefficient,bimonome(bin[1],bin[2],N),
                                             expand(pol),N)
         fi;
        end:
```

```
 >envect(x[1]*y[2]^2-3*x[2]*y[1]^2+y[3]^2*x[1],[1,2],3);
```

La procédure calcule pour chaque monôme de bidegré $(1,2)$ en les variables $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ (dans l'ordre lexicographique):

$$\Big[x_1\,{y_1}^2,\ {y_1}^2\,x_2,\ {y_1}^2\,x_3,\ x_1\,y_1\,y_2,\ y_1\,x_2\,y_2,\ y_1\,x_3\,y_2,\ x_1\,y_1\,y_3,\ y_1\,x_2\,y_3,$$

$y_1\, x_3\, y_3,\ x_1\, {y_2}^2,\ x_2\, {y_2}^2,\ x_3\, {y_2}^2,\ x_1\, y_2\, y_3,\ x_2\, y_2\, y_3,\ x_3\, y_2\, y_3,\ x_1\, {y_3}^2,$
$x_2\, {y_3}^2,\ x_3\, {y_3}^2\,]$

le coefficient de ce monôme dans pol:

$$[\,0,\ -3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\,]$$

- **enpol:** Voici une procédure qui fait exactement le chemin inverse:

```
enpol:=proc(b,bin,N)
          M := bimonome(bin[1],bin[2],N);
          convert([seq(b[i]*M[i],i = 1 .. nops(M))],`+`)
        end:
```

```
> enpol([0,-3,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0],[1,2],3);
```

$$x_1\, {y_2}^2 - 3\, x_2\, {y_1}^2 + x_1\, {y_3}^2$$

- **flip:** Calcul l'effet de flip_d sur un polynôme.

$$\mathbf{flip}_d\, P = P(\partial X, \partial Y)\Delta_d(X,Y) = P(\partial)\Delta_d(X,Y),$$

pour $P \in \mathbf{M}_d$. (Voir la procédure **derive**.)

- **maxvar:** Cette procédure donne le nombre de variables présentes dans un polynôme.

```
maxvar:=pol->max(op(map(a->if whattype(a)=indexed
                             then op(a) fi, indets(pol)))):
```

```
> maxvar(x[1]+4*x[5]+y[6]+3*x[6]);
```

$$6$$

- **monome:** Cette procédure produit l'ensmeble des monômes d'un certain degré h en un certain intervalle d'un ensemble v de variables:

```
monome:=proc(h,v,j,n)
          if h = 0 then [1]
          else [seq(op(map((c,i,v) ->
                   c*v[i],monome(h-1,v,i,n),i,v)),i = j .. n)]
          fi; end:
```

Ici, j, n indique que l'on ne considère que les variables de la $j^{ième}$ position à la $n^{ième}$ position dans le vecteur v. (L'introduction d'un intervalle ne sert qu'à des fins de programmation.)

```
> monome(3,[a,x,y,z],2,3);
```

$$[\, x^3,\, y\, x^2,\, y^2\, x,\, y^3\,]$$

A.4 Action diagonale du groupe symétrique

- **action:** Cette procédure calcule l'action diagonale d'une certaine permutation σ sur un polynôme P.

```
action:=proc(sigma,P)
         if whattype(expand(P)) = integer then P
         else n:=maxvar(P);
              rho:=complete(sigma,n);
              subs({seq(x[i] = x[rho[i]], i=1..n),
                seq(y[i] = y[rho[i]], i=1..n)},P)
         fi; end:
```

- **canonique:** Cette procédure donne une permutation "canonique" d'un type cyclique égal au partage par.

```
canonique:=proc(par)
             res:=[];
             val:=0;
             for i to nops(par) do
               res:=[op(res),val+par[i],
                          seq(j,j=val+1..val+par[i]-1)];
               val:=nops(res);
             od:res;end:

>canonique([5,3,1]);
```

$$[5, 1, 2, 3, 4, 8, 6, 7, 9]$$

- **complete:** Si τ est une permutation de $V \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ alors, la procédure complète ajoute à τ les points fixes nécessaires pour en faire une permutation de $\mathcal{S}_n$.

```
complete:=proc(tau,n)
           rep:=tau;
           for i to n do
            if not member(i,tau) then
             if i <= nops(rep) then
              rep:=subsop(i=op([i,rep[i]]),rep)
             else rep:=[op(rep),i]
             fi;
            fi;
           od; rep;
          end:
```

- **orbite:** Cette procédure calcul une base de l'orbite d'un polynôme P en N variables, sous l'action diagonale.

```
orbite:=proc(P,N)
         b:=bidegre(P):
         rep:={0}:
         M:=max(maxvar(P),N):
         for sigma in permute(N) do
           a:=action(sigma,P);
           vector(envect(a,M));
           rep:={op(rep),''};
         od;
        basis(rep):
        map(convert,'',list);
        map(enpol,'',b,M);
        end:
```

Ici, *permute* est une fonction du package *combinat* de MapleV qui engendre l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

- **symetrise:** Cette procédure symétrise un polynôme en n variables.

```
> symetrise(x[1]*x[2],3);
```

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

A.5 Calcul de caractères

- **H:** Polynômes de Macdonald. (Voir la section A.8 pour la procédure **kostka**.)

```
H:=proc(mu)
    convert([seq(kostka(mu,v)*s[op(v)],
              v=Par(convert(mu,‘+‘)))],‘+‘)
   end:
```

- **phi:** Calcule ${\phi_A}^{(j)}$:

$$\Phi_A^{(j)} = \sum_{\nu \in A} (T_\nu)^{m-j}\, \widetilde{H}_\nu \prod_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq \nu}} \frac{1}{1 - T_\nu / T_\alpha}$$

```
phi:=proc(A,j)
      if mu=[[1]] then 1
      else
       convert(map((v,A,j)->
             (-T(cases(v)))^j*H(v)*Pr(A,v),A,A,j),‘+‘);
      tos(‘‘);
     end:
```

Cette procédure utilise, pour fin de simplification, la procédure suivante:

```
Pr:=(A,v)->convert([seq(1/(1-(T(cases(v)))/(T(cases(a)))),
                 a=subs(v=NULL,A))],‘*‘);
```

- **psi:** Calcule ψ_A.

```
psi:=proc(A)
      phimu:=phi(A,0);
      n:=degree(phimu,{q,t});
      rep:=0;
       for i from 0 to n do
       rep:=rep+coeff(coeff(phimu,q,i),t,n-i)*q^i*t^(n-i)
       od:rep;end:
```

- **Frobenius:** Cette procédure calcule le Frobenius d'un espace ayant comme base B, sur lequel agit $\mathcal{S}_J$ selon l'action α.

```
Frobenius:=proc(B,alpha,J)
            if B={} then 0 else
            [seq(Tracerep(alpha,mu,B)
                *Powersum(mu)/zee(mu),mu=Par(J))]:
```

```
tos(convert('',`+`))
fi
end:
```

- **Tracerep:** Procédure utilisée par la procédure **Frobenius**:

```
Tracerep:=(alpha,mu,B)->convert([seq(linsolve
                        (transpose(matrix([op(B)])),
                         transpose(matrix([alpha(canonique(mu),
                         B[i])])))[i,1],i=1..nops(B))],`+`):
```

- **Powersum:** Procédure utilisée par la procédure **Frobenius**:

```
powersum:=mu->convert(map(k->cat(p,k),mu),`*`):
```

- **biFrobenius:** Calcul du Frobenius bigradué de l'espace des dérivées partielles de Δ_d, pour un diagramme d.

```
biFrobenius:=d->Bif(espace(d,nops(d)));
```

- **espace:** Procédure qui calcule une base de $\mathbf{M}_d$ pour un certain diagramme d donné. Le diagramme d est donné par la liste de ces cases.

```
espace:=proc(d,n)
         if d=[] then {} else
         map((b,d,n)->op(bases(Delta(d),b,n)),
                      listeDeBidegres(d),d,n):
         {op('')} fi
        end:
```

- **listeDeBidegres:** Procédure donnant la liste des bidegrés correspondant à un diagramme d donné.

```
listeDeBidegres:=proc(d)
                  b:=convert(d,`+`):
                  [seq(seq(b-[min(k-i,b[1]),i],
                    i=0..min(k,b[2])),k=0..b[1]+b[2])]
                 end:
```

- **Bif:** Cette procédure calcule le Frobenius bigradué d'un espace dont une base bihomogène est donnée.

```
Bif:=proc(Base)
      if Base={} then 0 else
      map((b,act,n,Base)->
```

```
            Frobenius(map(envect,bihomogene(Base,b),n),
                           subs(B=b,N=n,act),n)
                      *q^b[1]*t^b[2],
     map(bidegre,Base),
     'proc(sigma,v) actvect(sigma,v,B,N) end',
     max_var(Base),Base):
     tos(convert('',`+`)) fi
    end:
```

- **actvect:** Procédure utilisée par la procédure précédente:

```
actvect:=proc(sigma,v,b,N)
           envect(action(sigma,enpol(v,b,N)),N)
          end:
```

A.6 Calcul de bases pour les espaces

- **bases:** Donne une base de la composante de bidegré (h, k) de l'orbite d'un polynôme selon $\mathcal{S}_N$.

```
bases:=proc(pol,d,N)
        if whattype(pol)<>set then
        bases({op(orbite(pol,N))},d,N)
        else
         b:=bidegree(pol[1]):
         if d[1]>b[1] or d[2]>b[2] then {}
         elif d[1]=0 and d[2]=0 then {1}
         elif d[1]=b[1] and d[2]=b[2] then pol
         elif d[1]=b[1] then
            suivants(bases(pol,d+[0,1],N),y,N):
         else suivants(bases(pol,d+[1,0],N),x,N):
        fi fi
       end:
```

- **suivants:** Calcule une base de l'ensemble des dérivées d'une famille *liste* de polynômes d'un certain bidegré, selon les variables $v_1, v_2, \ldots, v_N$, pour v et N donné.

```
suivants:=proc(liste,v,N)
            if nops(liste)=0 then {}
            else
            if v=x then b:=bidegre(liste[1])-[1,0]
```

```
        else b:=bidegre(liste[1])-[0,1]
fi:
if b[1]<0 or b[2]<0 then res:={}
else
 map(proc(d,v,N):
   seq(diff(d,v[j]),j=1..N) end,
 liste,v,N) minus {0}:
 res:=map(envect,",N)
fi fi:
if res<>{} then  basis(map(vector,res)):
        map(enpol,map(convert,",list),b,N)
else {} fi
end:
```

A.7 Intersections d'espaces

- **intersection:** Cette procédure prend une liste de diagrammes et calcule une base pour chaque bidegré présent dans l'intersection.

```
intersection:=proc(listediag)
               d:=listediag[1]:
               if d=[] then {} else
               map((b,listediag,n)->
                  op(interbases(listediag,b,n)),
                  listeDeBidegres(d),listediag,nops(d)):
               {op(")} fi
              end:
```

Maintenant, calculons, par exemple, une base de l'intersection

$$\mathbf{M}_A := \mathbf{M}_{31} \cap \mathbf{M}_{22} :$$

```
>map(cases,predecesseurs([3,2]));
```

$$[[[0,0],[1,0],[0,1][1,1]],[[0,0],[1,0],[2,0][0,1]]]$$

```
>intersection(``);
```

$\{-1,\ 2\,x_3\,y_4 - 2\,y_3\,x_4 - 2\,x_2\,y_4 + 2\,x_2\,y_3 + 2\,y_2\,x_4 - 2\,y_2\,x_3,\ -2\,y_4$
$+2\,y_3,\ -2\,y_3 + 2\,y_2,\ -2\,y_4 + 2\,y_1,\ -2\,x_4 + 2\,x_3,\ 2\,x_2 - 2\,x_1,\ 2\,x_4$
$-2\,x_1,\ -2\,x_2\,y_3 + 2\,y_2\,x_3 + 2\,x_1\,y_3 - 2\,x_1\,y_2 - 2\,y_1\,x_3 + 2\,y_1\,x_2,$
$-2\,y_1\,x_3 + 2\,y_1\,x_4 + 2\,x_1\,y_3 - 2\,y_3\,x_4 - 2\,x_1\,y_4 + 2\,x_3\,y_4,\ 2\,x_2\,x_1$

$-2\,x_1\,x_4 - 2\,x_2\,x_3 + 2\,x_3\,x_4,\; 2\,x_1\,x_3 - 2\,x_1\,x_4 - 2\,x_2\,x_3$

$+2\,x_2\,x_4\}$

- **interbases:** Cette procédure prend une liste de diagrammes et calcule une base de bidegré (h,k) de l'intersection.

```
interbases:=proc(listdiag,h,k,N)
              intbasis(op(map((d,h,k,N)->
                map(envect,bases(Delta(d),h,k,N),N),
                listdiag,h,k,N))):
              map(enpol,map(convert,",list),[h,k],N)
             end:
```

- **reunion** Cette procédure prend une liste de diagrammes et calcule une base pour chaque bidegré présent dans la réunion. (Cette procédure sert pour le chapitre 5.)

```
reunion:=proc(listebases)
          map((b,listebases,n)->
             op(reunionbases(listebases,b,n)),
          map(bidegre,map(op,listebases)),listebases,
           max(op(map(maxvar,map(op,listebases)))))
         end:
```

- **reunionbases:** Cette procédure prend une liste de diagrammes et calcule une base de bidegré (h,k) de la réunion.

```
reunionbases:=proc(listebases,b,N)
               basis({op(map((base,b,N)->
                     op(map(envect,base,b,N)),
                      listebases,b,N))}):
               map(enpol,",b,N)
              end:
```

A.8 Calcul des κ_γ

A.8.1 Polynômes de Kostka

- **kostka:** Calcule $\widetilde{K}_{\mu,\nu}$ selon la formule de G.Tesler.

```
kostka:=proc(mu,nu)
         if member(nu,sansconj(Par(couvert(mu,`+`))))
         then EvalBmu(kappa(Gamma(v)),mu)
         else normal(T(cases(mu))*star(kostka(mu,conj(nu))))
         fi
        end:
```

- **Gamma:** Cette procédure enlève à ν sa plus grande part.

```
>Gamma([5,3,1,1]);
```

$$[3,1,1]$$

- **K:** Matrice de polynômes de Kostka.

```
K:=n->matrix([seq([seq(kostka(nu,mu),nu=Par(n))],mu=Par(n))]);
```

- **EvalBmu:**

```
EvalBmu:=(f,mu)->sort(expand(factor
                       (evalsf(f,B(cases(mu))))),[q,t]);
```

A.8.2 Inverse Kostka

- **invK:** Cette procédure calcule l'inverse de la matrice des polynômes de Kostka selon une formule (non-publiée) de Bergeron-Garsia. Ceci rend plus efficace le calcul de l'inverse, car un tel calcul, direct avec Maple, dépasse rapidement les capacités de l'ordinateur.

```
invK:=proc(n)
        multiply(invMatHmu(n),transpose(K(n)),
                               ptq(n),Omega(n));
        map(normal,'');
       end:
```

- **evaltq:** Fonction auxiliaire pour le calcul ci-dessus, qui est utilisé par la procédure **ptq**.

```
evaltq:=mu->convert(map(x->(1-t^x)(1-q^x),mu),`*`);
```

- **ptq:** Fonction auxiliaire à **invK**.

```
ptq:=proc(n)
      evalm(((chi(n))&*(diag(map(evalqt,Par(n)))))
                                &*(invchi(n)));
      map(normal,'')
     end:
```

- **invMatHmu:** Fonction auxiliaire à **invK**.

```
invMatHmu:=proc(n)
             diag([op(map(proc(x)
                       1/(hpmu(x)*hmu(x)) end, Par(n)))])
            end:
```

- **hmu:** Fonction auxiliaire à **invMatHmu**.

```
hmu:=proc(mu)
      map((c,mu)->q^bras(op(c),mu)-t^(jambe(op(c),mu)+1),
                                      cases(mu),mu);
      convert(``,`*`);
     end:
```

- **hpmu:** Fonction auxiliaire à **invMatHmu**.

```
hpmu:=proc(mu)
      map((c,mu)->-q^bras(op(c),mu)+t^jambe(op(c),mu),
                                 cases(mu),mu);
      convert(``,`*`);
     end:
```

- **invchi:** Cette procédure évite de calculer inutilement l'inverse de la matrice des caractères.

```
invchi:=proc(n)
         multiply(diag(map(mu->1/zee(mu),Par(n))),
                              transpose(chi(n)))
        end:
```

A.8.3 Nabla

- **nabla:** Cette procédure calcule $\nabla(f)$. ∇ est une transformation linéaire, définie sur l'anneau Λ_n en donnant son effet sur la base $\{\widetilde{H}_\mu\}_{\mu\vdash n}$:$\nabla(\widetilde{H}_\mu) = T_\mu \widetilde{H}_\mu$.

```
nabla:=proc(f)
        n:=SFdeg(tos(f)):
        [coeff(tos(f),s[]),
         seq(tosym(multiply(mat_nabla(k),tovect(f,k)),k),
                          k=1..n)]:
        convert(",`+`)
       end:
```

Cette procédure utilise la sous-procédure suivante:

```
tosym:=proc(v,n) local i:
        [seq(v[i,1]*s[op(Par(n)[i])],i=1..nops(Par(n)))]:
        tos(convert(",`+`))
       end:
```

- **invnabla:** Calcul la matrice inverse des nabla.

```
invnabla:=f->subs(s=1,
                  tos(star(omega(nabla(omega(star(f)))))));
```

- **matnabla:** Calcul la matrice des nabla.

```
matnabla:=proc(n)
            evalm(((K(n))&*(matTmu(n)))&*(invK(n)));
            map(normal,'');
           end:
```

- **matTmu:** Cette procédure calcule la matrice diagonale des T_μ.

```
matTmu:=proc(n)
          diag(map(nu->T(cases(nu)),Par(n)))
         end:
```

- **tovect:** Cette procédure donne le vecteur des coefficients de f dans la base des Schur.

```
tovect:=proc(f,n)
         matrix([seq([coeff(tos(f),s[op(nu)])],nu=Par(n))])
        end:
```

- **Omega:** Cette procédure calcule la matrice des ω.

```
Omega:=proc(k)
        n:=nops(Par(k));
        matrix(n,n,subs(N=n,`proc(i,j) if i+j=N+1
                             then 1 else 0 fi end`))
       end:
```

- **star:** Cette procédure fait la substitution $t \to 1/t$, $q \to 1/q$.

A.8.4 Calcul des κ_γ via nabla

- **kappa:** Cette procédure calcule κ_ν:

$$\kappa_\nu[X;q,t] = \left(\nabla^{-1}\,\omega\,s_\nu\left[\frac{X+1}{(1-t)(1-q)} - 1\right]\right)_{X \mapsto X(1-q)(1-t)-1},$$

```
kappa:=proc(nu)
        lambda(s[op(nu)],k->(cat(p,k)+1)/((1-t^k)*(1-q^k))-1);
        inv_nabla(w(''));
        lambda('',k->(1-t^k)*(1-q^k)*cat(p,k)-1);
       end:
```

Bibliographie

Bergeron F. et Garsia, A. Science fiction and Macdonald's polynomials, (en préparation)

Bergeron, F. et Hamel, S. Intersection of module related to Macdonald's polynomials, (en préparation)

Bergeron, N. et Garsia, A. On certain spaces of harmonic polynomials, *Americain Mathematical Society*, pp. 51–86, 1992.

DeConcini, C. et Procesi, C. Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.*, **64**, pp. 203–230, 1981.

Foulkes, H.O. A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions, *PERMUTATIONS, Actes du colloque Paris, juillet 72*, 1974.

Garnir, H. Théorie de la représentation linéaire des groupes symétriques, *Mémoire de la Soc. Royale de Liège*, **10**, 1950.

Garsia, A. et Haiman, M. A graded representation model for Macdonald's polynomials, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Volume **90**, pp. 3607–3610, 1993.

Garsia, A. et Haiman, M. Some natural bigraded $\mathcal{S}_n$-modules and the q,t-Kostka coefficients, *Advances in Mathematics*, March 7, 1995.

Garsia, A. et Procesi, C. On certain graded $\mathcal{S}_n$-modules and the q-Kostka polynomials, *Advances in Mathematics*, **94**, pp. 82–138, 1992.

Garsia, A. et Tesler, G. Plethystic Formulas for Macdonald q,t-Kostka Coefficients, *Advances in Mathematics*, **123**, pp.143–222, 1996.

Haiman, Marc D. Macdonald Polynomials and Hilbert Schemes, En préparation.

Kadell, Kevin W.J The Selberg-Jack symmetric functions Preprint, 1992.

Knutson, Donald λ-*Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group*, Lecture Notes in Mathematics, 1973.

Lascoux, A. et Schützenberger, M.P. Sur une conjecture de H.O. Foulkes *C.R. Académie des Sciences de Paris*, **286 A**, pp.323–324, 1978.

Macdonald, I.G. A New Class of Symmetric Functions *Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 372/S-20*, Actes 20^e Séminaire Lotharingien, pp.131–171, 1988.

Macdonald, I.G. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Science Publications, 1995.

Sagan, Bruce E. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Brooks/Cole Publishing Company, 1991.

Steinberg, R. Differential equations invariant under finite reflection groups *A.M.S. Transactions* **112**, pp.392–400, 1964.

Tanisaki, T. Defining ideals of the closures of conjugacy classes and representations of the Weyl groups, *Tohoko J. Math.*, **34**, pp.575–585, 1982.