

# Résolution de récurrences

Il arrive souvent que pour analyser la complexité d'un algorithme on doive résoudre une récurrence.

**Exemple:** Dans le cas du produit de deux entiers de  $n$  chiffres et de l'algorithme diviser-pour-régner, on avait:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 3T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n & \text{sinon} \end{cases}$$

Comment résoudre?

# Résolution de récurrences

## Solution 1: Intuition ou conjecture

Étape 1: Calculer les premières valeurs de la récurrence

Étape 2: Regarder pour des “patterns” ou régularités

Étape 3: Trouver une forme générale

Étape 4: Démontrer que cette forme est correcte

# Résolution de récurrences

## Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants:

Soit la récurrence  $R$

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = 0$$

Voici les étapes de la résolution:

- 1) Trouver le polynôme caractéristique  $P(x)$  de la récurrence  $R$
- 2) Trouver les racines de  $P(x)$

Si ces racines sont distinctes

- 3) La solution générale est de la forme  $t_n = \sum_{i=1}^k c_i r_i^n$
- 4) Résoudre le système d'équations linéaires donné par les conditions initiales pour trouver la valeur des constantes  $c_1, c_2, \dots, c_k$
- 5) Écrire la solution  $t_n$  en fonction de ces constantes  $c_i$

# Résolution de récurrences

Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants:

Soit la récurrence  $R$

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = 0$$

Voici les étapes de la résolution:

- 1) Trouver le polynôme caractéristique  $P(x)$  de la récurrence  $R$
- 2) Trouver les racines de  $P(x)$

Si ces racines ne sont pas toutes distinctes

- 3) La solution générale est de la forme  $t_n = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n$

où on a  $\ell$  racines  $r_i$  de multiplicité  $m_i$

- 4) Résoudre le système d'équations linéaires donné par les conditions initiales pour trouver la valeur des constantes  $c_1, c_2, \dots, c_k$
- 5) Écrire la solution  $t_n$  en fonction de ces constantes  $c_i$

# Résolution de récurrences

## Récurrences linéaires non-homogènes à coefficients constants:

Soit la récurrence  $R$

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

où  $b$  est une constante et  $p(n)$  un polynôme de degré  $d$

Voici les étapes de la résolution:

- 1) On commence par transformer cette récurrence en une récurrence homogène
- 2) Résoudre  $R^*$  (cas homogène) comme d'habitude mais en s'assurant que les conditions initiales satisfont aussi l'équation de départ

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

## Changement de variables:

- Il arrive qu'il soit plus facile de commencer par faire un changement de variables lorsque l'on veut résoudre une récurrence
- Par exemple, soit  $T(n) = 4t(n/2) + n^2$ . En faisant le changement de variables  $t_i = T(2^i)$  on obtient la récurrence linéaire non-homogène  $t_i - 4t_{i-1} = 4^i$
- On résout cette récurrence de la façon habituelle et ensuite on exprime la solution obtenue pour les  $t_i$  en fonction des  $T(n)$  en utilisant le fait que  $n = 2^i$  et donc que  $i = \log_2 n$

## Théorème:

Soient  $n_0 \geq 1$ ,  $\ell \geq 1$ ,  $b \geq 2$  et  $k \geq 0$  des entiers et soit  $c \in \mathbb{R}^+$ .

Soit  $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction éventuellement non décroissante telle que

$$T(n) = \ell T\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k, \forall n > n_0,$$

où  $\frac{n}{n_0}$  est une puissance de  $b$ . Alors,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \ell < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } \ell = b^k \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$