Dictionnaires ordonnés
et
“Skip List”

Dictionnaires ordonnés

- Les clés sont comparés selon un ordre total
- On veut pouvoir faire toutes les opérations habituelles sur le dictionnaire mais en conservant l'ordre des clés
- Nouvelles opérations:
  - premier(): Retourne le premier élément du dictionnaire
    first():
  - dernier(): Retourne le dernier élément du dictionnaire
    last():

Dictionnaires ordonnés (suite)

- Nouvelles opérations (suite):

successeurs(k): successors(k):	Retourne un itérateur des entrées dont la clé est plus grande ou égale à k; en ordre croissant
prédécesseurs(k): predecessors(k):	Retourne un itérateur des entrées dont la clé est plus petite ou égale à k; en ordre décroissant
closestKeyBefore(k): closestValBefore(k):	Retourne la clé (ou la valeur) de l'entrée ayant la plus grande clé plus petite ou égale à k
closestKeyAfter(k): closestValAfter(k):	Retourne la clé (ou la valeur) de l'entrée ayant la plus petite clé plus grande ou égale à k

“Look-up Table”

- On appelle “Look-up table” l’implémentation d’un dictionnaire à l’aide d’une séquence ordonnée
  - On insère les éléments du dictionnaire dans un vecteur, de façon à ce que les clés forment une séquence ordonnée
  - Pour ordonner les clés, on utilise un comparateur de clé externe au dictionnaire

Performances

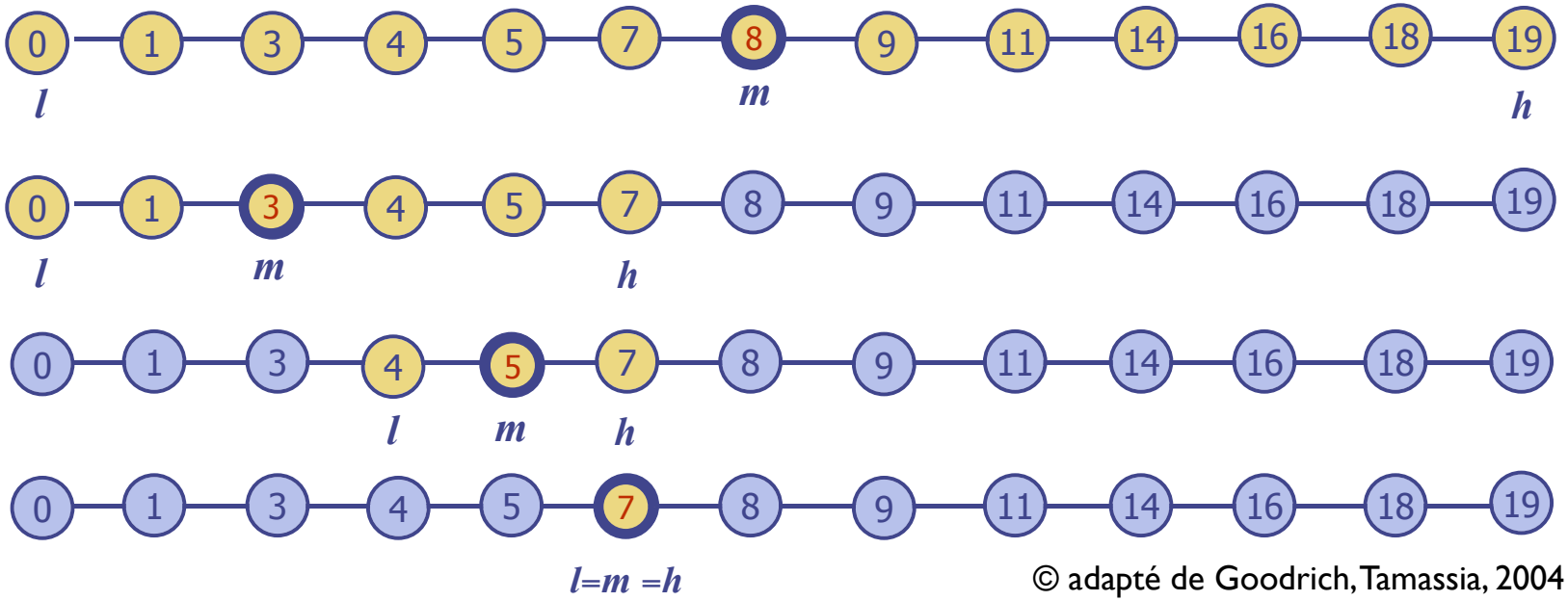
- Insérer un nouvel élément prend, dans le pire des cas, un temps O(n), étant donné que dans ce cas, on doit déplacer les n éléments déjà présent pour faire de la place à ce nouvel élément

- Enlever un élément prend, dans le pire des cas, un temps O(n), étant donné que dans ce cas, on doit déplacer les n éléments déjà présent vers la gauche (après avoir enlevé l'élément de clé minimal)

- Chercher un élément prend dans le pire des cas un temps O (logn), lorsqu'on utilise la recherche binaire

Recherche binaire

- Comme nos clés sont ordonnés, on peut commencer à chercher pour un élément de clé k, en comparant k avec la clé de l'élément en milieu de séquence, si k est < que cette clé, on cherche l'élément de clé k dans la partie gauche de la séquence, si >, dans la partie droite
- Exemple, recherche d'un élément de clé = 7



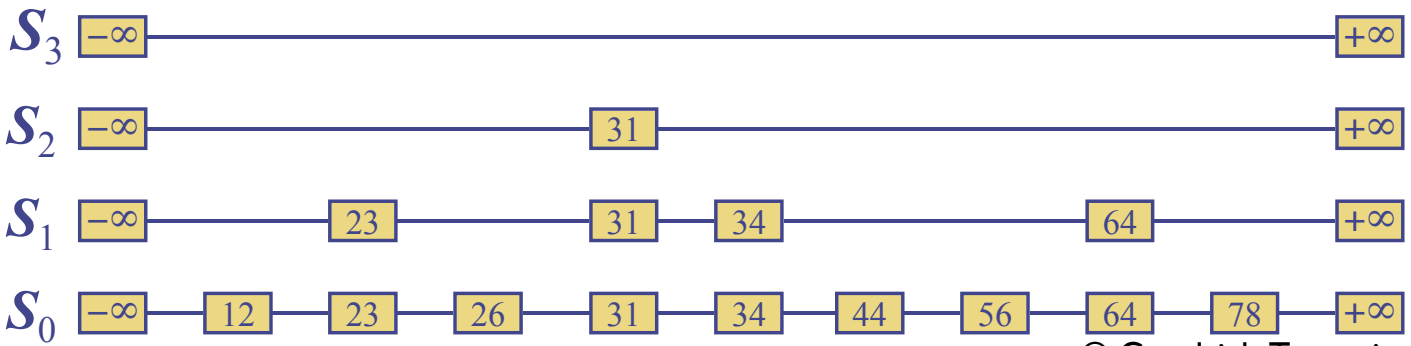
© adapté de Goodrich, Tamassia, 2004

"Skip List"

- Une "skip list" S pour un dictionnaire D consiste en une série de séquences $\{S_0, S_1, \ldots, S_h\}$. Chaque séquence contient un sous-ensemble des entrées du dictionnaire et, de plus, S satisfait:
  - Chaque séquence S_i contient des entrées de clés spéciales: - ∞ et + ∞
  - La séquence S_0 contient tous les éléments du dictionnaire, placés en ordre croissant de clé
  - Chaque séquence est une sous-séquence de la précédente:

$$S_h \subseteq S_{h-1} \subseteq \ldots \subseteq S_0$$

  - La séquence S_h contient seulement les 2 éléments de clés spéciales

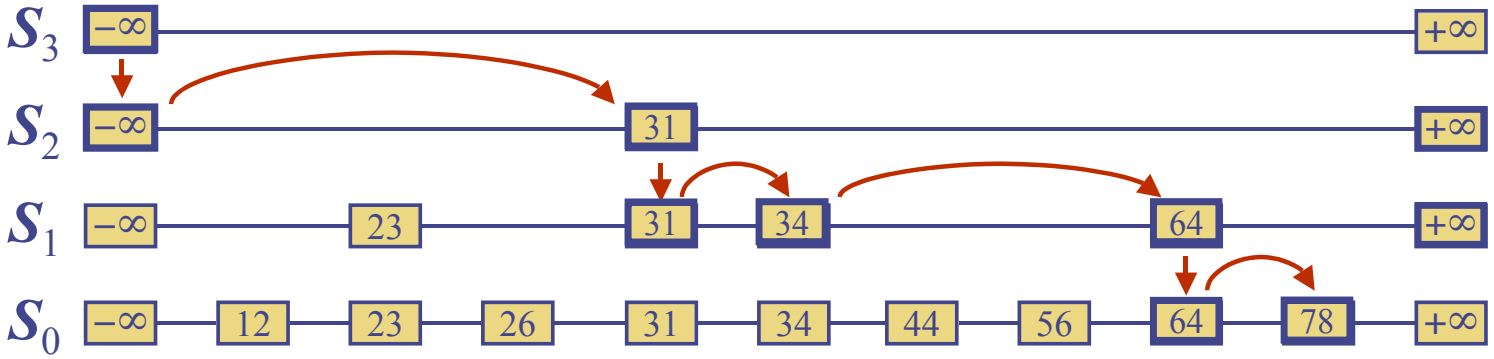


Algorithmes randomisés

- On utilise un algorithme randomisé pour insérer les entrées dans une "skip list".
- Un algorithme randomisé utilise un algorithme de génération aléatoire de bits pour contrôler son exécution. (Ex. Pile ou Face)
- Son temps d'exécution dépend de la séquence de bits générée (ou de la séquence de piles-faces.
- Le temps d'exécution, dans le pire des cas, est souvent grand mais arrive selon une très faible probabilité. (ex. on a eu seulement des piles)

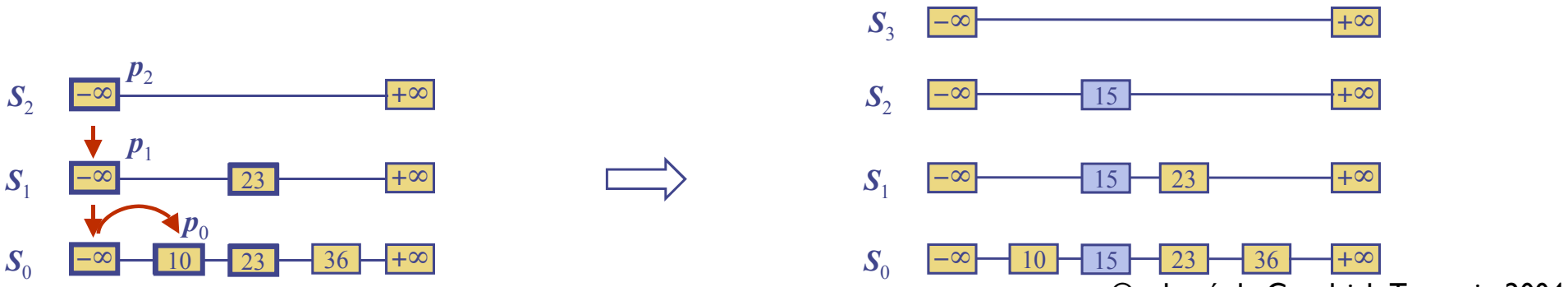
Chercher

- Exemple: chercher un élément de clé 78
- Pour chercher un élément de clé k dans une "skip list", on procède de la façon suivante:
  - On se place dans la première clé de la liste du haut
  - Tant qu'on peut descendre et qu'on n'a pas trouvé l'élément de clé k, on exécute les opérations suivantes:
    - On descend
    - Tant que la clé à droite est plus petite que k, on se déplace vers la droite



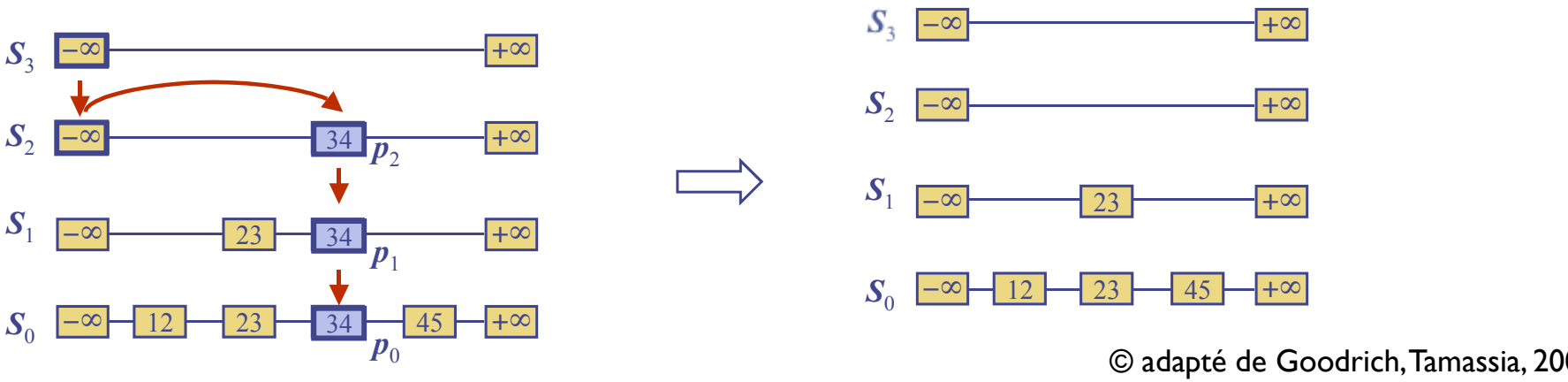
Insérer

- Pour insérer un élément (k,v) dans une "skip list", on utilise un algorithme randomisé comme suit:
  - On joue à "pile ou face" jusqu'à ce que l'on obtienne "pile". On dénote i le nombre de fois où on a eu "face" avant ce "pile".
  - Si i $\geq$ h, on ajoute a la "skip list" de nouvelles séquences $S_{h+1}, \ldots, S_{i+1}$, chacune contenant seulement les éléments de clés spéciales $+\infty$ et $-\infty$
- Exemple: insérer un élément de clé 15, i=2
  - On utilise l'algorithme chercher(k) pour trouver les positions $p_0, p_1, \ldots, p_i$ des entrées de plus grande clé plus petite ou égale à k dans chaque séquence $S_0, S_1, \ldots, S_i$
  - Pour $j \leftarrow 0, \ldots, i$, on insère (k,v) dans S_j après la position p_j



Supprimer

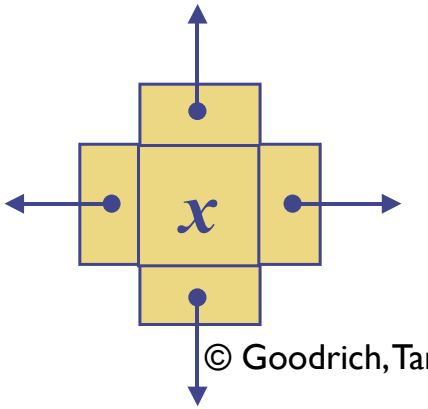
- Pour supprimer un élément de clé k dans une "skip list", on procède comme suit:
  - On cherche dans la "skip list" et on trouve les positions $p_0, p_1, \ldots, p_i$ d'une entrée de clé k, où la position p_j est dans la séquence S_j
  - On enlève les éléments de positions $p_0, p_1, \ldots, p_i$ des séquences $S_0, S_1, \ldots, S_i$
  - On ne garde qu'une séquence ne contenant que les deux clés spéciales
- Exemple: Enlever(34)



Implémentation

- On peut implémenter une "skip list" avec des noeuds quatruples de cette forme:

- Le noeud garde en mémoire:
  - l'entrée x = (k,v)
  - un lien vers le noeud précédent
  - un lien vers le noeud suivant
  - un lien vers le noeud au-dessus
  - un lien vers le noeud en-dessous



- Le comparateur des clés pour ces noeuds doit être capable de comparer les clés spéciales

Complexité en espace

- L'espace utilisé par une "skip list" dépend des bits randomisés utilisés lors de chaque appel de la fonction d'insertion.

- Dans le cas de l'utilisation de l'algorithme randomisé "pile ou face", on utilise les deux faits suivants en probabilité:

  - Fait 1: La probabilité d'obtenir i faces consécutives lors de lancées d'une pièce de monnaie est de $1/2^i$

  - Fait 2: Si étant donné n éléments, on choisit leur appartenance à un ensemble avec une probabilité p, alors la taille espérée de l'ensemble est np

- Donc, si l'on a une "skip list" avec n entrées

  - Par le fait 1, on insère un élément dans la séquence S_i avec probabilité $1/2^i$

  - Par le fait 2, la taille espérée de la séquence S_i est $n/2^i$

Complexité en espace (suite)

- Le nombre espéré de noeuds dans une "skip list" est:

$$\sum_{i=0}^{h} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{2^i} < 2n$$

- La complexité en espace d'une "skip list" est donc de O(n)

Hauteur de la "skip list"

- Le temps d'exécution des algorithmes de recherche et d'insertion dépend de la hauteur h de la "skip list"
- On va montrer que, avec une très grande probabilité, la hauteur d'une "skip list" ayant n éléments est de $O(\log n)$
- Pour ce faire, on va utiliser les faits suivants:
  - Fait 1: La probabilité d'obtenir i faces consécutives lors de lancées d'une pièce de monnaie est de $1/2^i$
  - Fait 2: Si étant donné n éléments, on choisit leur appartenance à un ensemble avec une probabilité p, alors la taille espérée de l'ensemble est np
  - Fait 3: Si n événements ont chacun une probabilité p d'arriver, alors la probabilité qu'au moins un événement arrive est au plus np

Complexité en temps

- Le temps d'exécution de l'algorithme de recherche dans une "skip list" est proportionnel au
  - Nombre de descentes +
  - Nombre de comparaisons vers la droite
- Le nombre de descentes est borné par la hauteur de la "skip list" et est donc en O(log n) avec une très haute probabilité
- Le nombre total de comparaisons vers la droite est aussi en O(log n)
- La complexité en temps de l'algorithme de recherche est O(log n)
- L'analyse des algorithmes d'insertions et de suppressions donne des résultats similaires