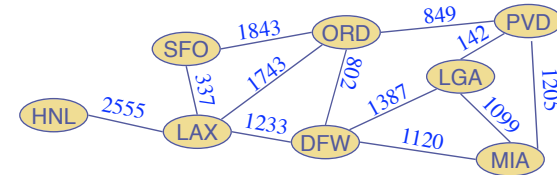


Chemin de poids minimal entre deux sommets

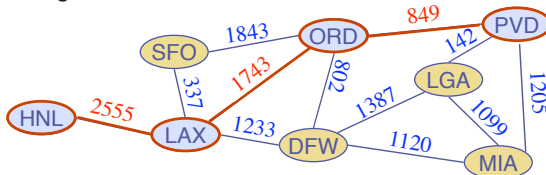
Graphe avec poids

- Dans un graphe avec poids, chaque arête garde en mémoire une valeur numérique, appelée le poids de l'arête
- Le poids d'une arête peut représenter une distance, un coût, etc..
- Exemple:
 - Dans ce graphe, le poids d'une arête représente la distance entre deux aéroports



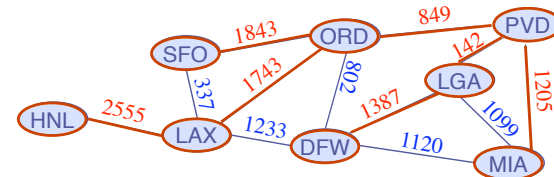
Chemin de poids minimal

- Étant donné un graphe et deux sommets u et v , on veut trouver le chemin de poids total minimal entre u et v .
 - on va appeler la **longueur** d'un chemin la somme des poids des arêtes faisant parties de ce chemin
 - le chemin de poids minimal (ou longueur minimal) entre u et v sera appelé la **distance** entre u et v
- Exemple: Chemin de longueur minimale entre PVD et HNL:
Longueur = 5147



Propriétés

- **Propriété 1:**
Un sous-chemin d'un chemin de coût minimal est un chemin de coût minimal
- **Propriété 2:**
Étant donné un sommet v d'un graphe non-orienté et connexe G , il existe un arbre couvrant composé des chemins de coût minimal entre v et tous les autres sommets du graphe
- Exemple: Arbres des chemins de coût minimal de PVD

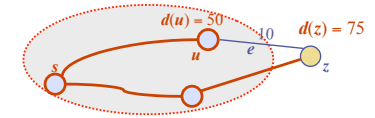


Algorithme de Dijkstra

- La **distance** entre un sommet v et un sommet s est le poids total minimal d'un chemin entre v et s
- L'algorithme de Dijkstra est un algorithme glouton qui calcule les distances entre un sommet v et tous les autres sommets d'un graphe
- Ici, on va assumer:
 - Le graphe est connexe
 - Le graphe est non-orienté
 - Les poids des arêtes sont **non-négatifs**
- On va faire grossir un "nuage" de sommets, contenant au départ v et couvrant éventuellement tous les sommets
- On va donner une étiquette $d(u)$ à chaque sommet, représentant la distance entre v et u dans le sous-graphe constitué des sommets dans le nuage et des arêtes adjacentes
- À chaque étape:
 - On ajoute au nuage le sommet u extérieur au nuage qui a la plus petite étiquette $d(u)$
 - On met à jour les étiquettes des sommets adjacents à u

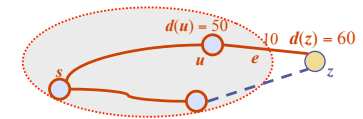
Relaxation des arêtes

- On appelle la mise à jour des étiquettes des sommets, après l'ajout d'un sommet u dans le nuage, la **relaxation des arêtes**
- Considérons une arête $e=(u,z)$ telle que
 - u est le sommet qu'on vient d'ajouter au nuage
 - z n'est pas dans le nuage

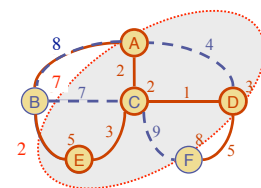
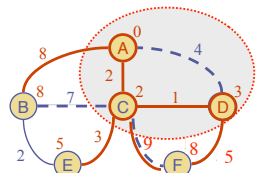
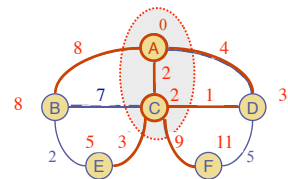
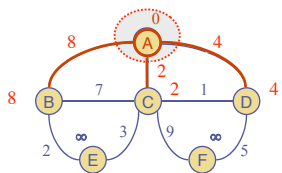


- La relaxation de e , consiste à mettre à jour la distance $d(z)$ comme suit:

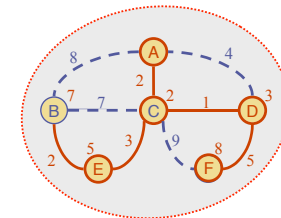
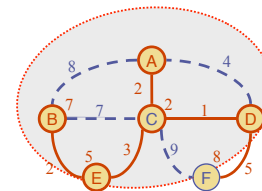
$$d(z) \leftarrow \min\{d(z), d(u) + \text{poids}(e)\}$$



Exemple:



Exemple (suite):



Analyse de complexité de l'algorithme de Dijkstra

- Insérer les sommets et leur sommet et leur étiquette correspondante dans une liste avec priorités prend un temps $O(n \log n)$ si on insère les éléments un à un, ou un temps $O(n)$ si on utilise une construction de monceau de bas en haut
- À chaque tour de boucle TANT QUE, on prend un temps $O(\log n)$ pour enlever un sommet u du monceau, et un temps $O(\deg(u) \log n)$ pour exécuter la procédure de relaxation
- Le temps d'exécution total de la boucle TANT QUE est donc de

$$\sum_{v \in G} (1 + \deg(v)) \log n$$

- La complexité en temps de Dijkstra est de $O((n+m) \log n)$