# Notation asymptotique

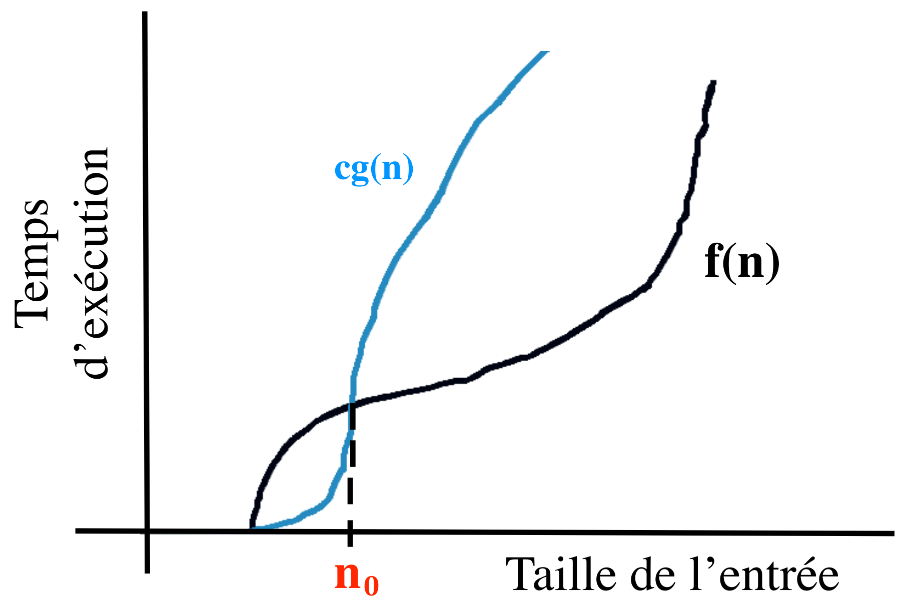
# Notation Grand $O$

Étant donné des fonctions $f(n)$ et $g(n)$, on dit que

$f(n)$ est $\mathcal{O}(g(n))$

s'il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que

$$f(n) \leq cg(n) \qquad \forall n,\ n \geq n_0$$



# Grand $O$ et taux de croissance

- La notation grand $O$ donne une borne supérieure du taux de croissance d'une fonction.

- La phrase "$\mathbf{f(n)}$ est $O(\mathbf{g(n)})$" signifie donc que le taux de croissance de $\mathbf{f(n)}$ est plus petit ou égal au taux de croissance de $\mathbf{g(n)}$.

- On peut utiliser la notation $O$ pour ordonner les fonctions à partir de leur taux de croissance.

$$1 \leq \log n \leq n \leq n\log n \leq n^2 \leq 2^n \leq n^n$$

- La notation grand $O$ est réflexive et transitive.

# Propriétés de $O$

1) Règle du seuil: Si $f$ et $t$ sont 2 fonctions strictement positives de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, alors

$$t(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \Longleftrightarrow \exists c' \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ t(n) \leq c' f(n)$$

2) Règle du maximum: Soient $f$ et $t$ deux fonctions de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, alors

$$\mathcal{O}(f(n) + t(n)) = \mathcal{O}(\max(f(n), t(n)))$$

3) Si $f(n) \in \mathcal{O}(h_1(n))$ et $g(n) \in \mathcal{O}(h_2(n))$, alors $(f \cdot g)(n) \in \mathcal{O}(h_1 \cdot h_2(n))$

4) $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \Longleftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ et $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$

# Rappel: logarithmes et exposants

**Propriétés des logarithmes**

$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$

$\log_b(x^a) = a \log_b(x)$

**Propriétés des exposants**

$a^{(b+c)} = a^b a^c$

$a^{bc} = (a^b)^c$

$a^b / a^c = a^{b-c}$

# Grand $\Omega$ et grand $\Theta$

- Grand $\Omega$

  Étant donné des fonctions **f(n)** et **g(n)**, on dit que

  $$\mathbf{f(n)} \text{ est } \Omega(\mathbf{g(n)})$$

  s'il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que

  $$f(n) \geq cg(n) \qquad \forall \text{entier } n \geq n_0$$

- Grand $\Theta$

  Étant donné des fonctions **f(n)** et **g(n)**, on dit que

  $$\mathbf{f(n)} \text{ est } \Theta(\mathbf{g(n)})$$

  si **f(n)** est $O$(**g(n)**) et **f(n)** est $\Omega$(**g(n)**), i.e s'il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

  $$c_1\,\mathbf{g(n)} \leq \mathbf{f(n)} \leq c_2\,\mathbf{g(n)} \qquad \forall\ n \geq n_0$$

# Intuition: notation asymptotique

- Grand $O$

  **f(n)** est $O$(**g(n)**) si **f(n)** est asymptotiquement plus petite ou égale à **g(n)**

- Grand $\Omega$

  **f(n)** est $\Omega$ (**g(n)**) si **f(n)** est asymptotiquement plus grande ou égale à **g(n)**

- Grand $\Theta$

  **f(n)** est $\Theta$(**g(n)**) si **f(n)** est asymptotiquement égale à **g(n)**