

# Notation asymptotique

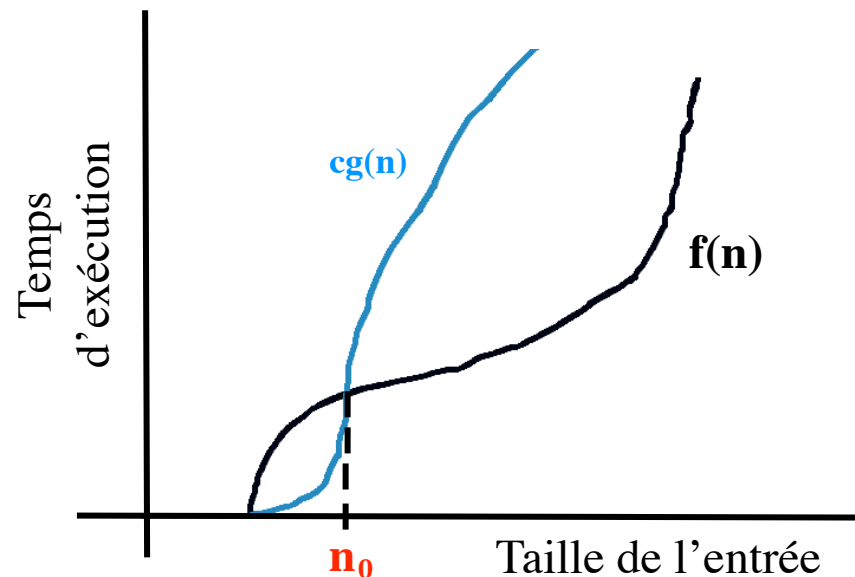
# Notation Grand $O$ (§2.4)

Étant donné des fonctions  $f(n)$  et  $g(n)$ , on dit que

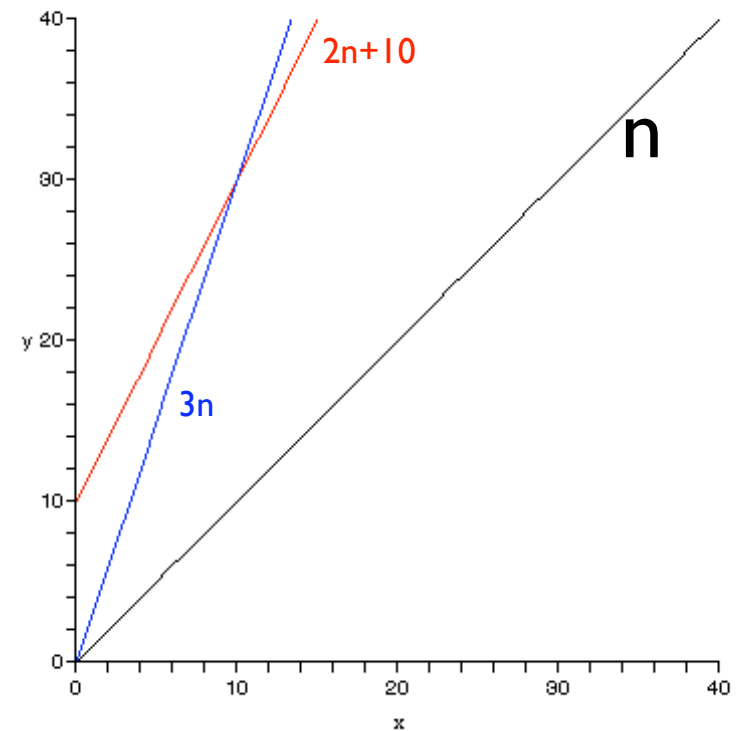
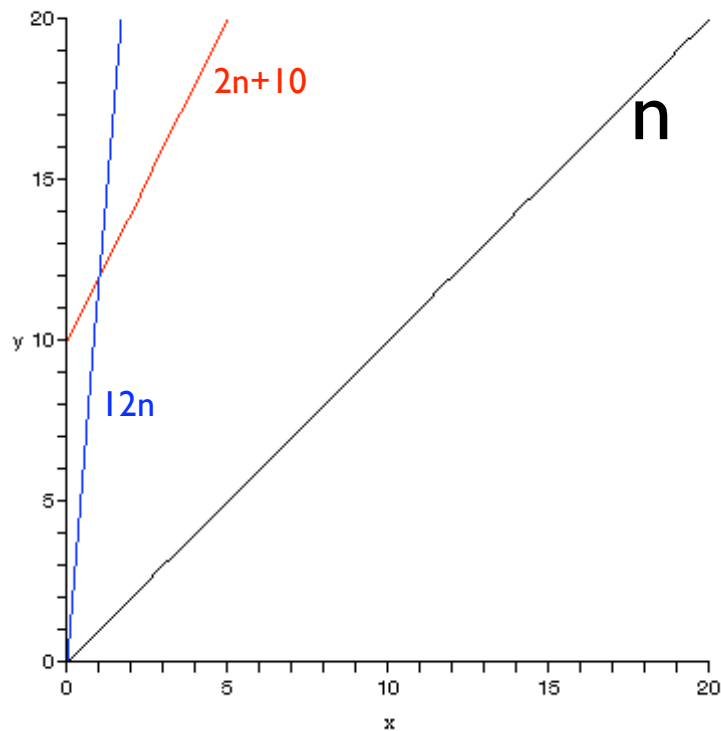
$f(n)$  est  $\mathcal{O}(g(n))$

s'il existe des constantes  $c > 0$  et  $n_0 \geq 1$  telles que

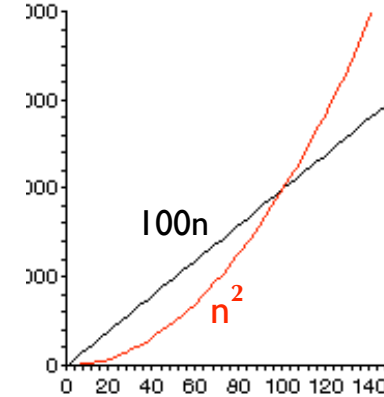
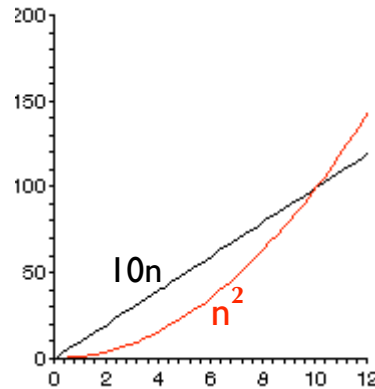
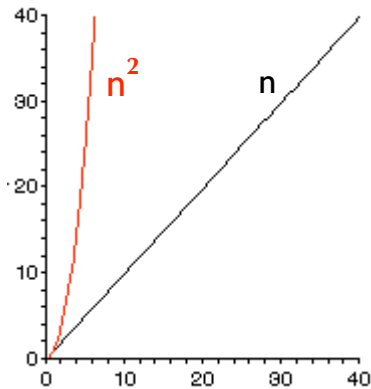
$$f(n) \leq cg(n) \quad \forall n, n \geq n_0$$



# Exemple 1 : $2n + 10$ est $O(n)$



## Exemple 2 : $n^2$ n'est pas $O(n)$



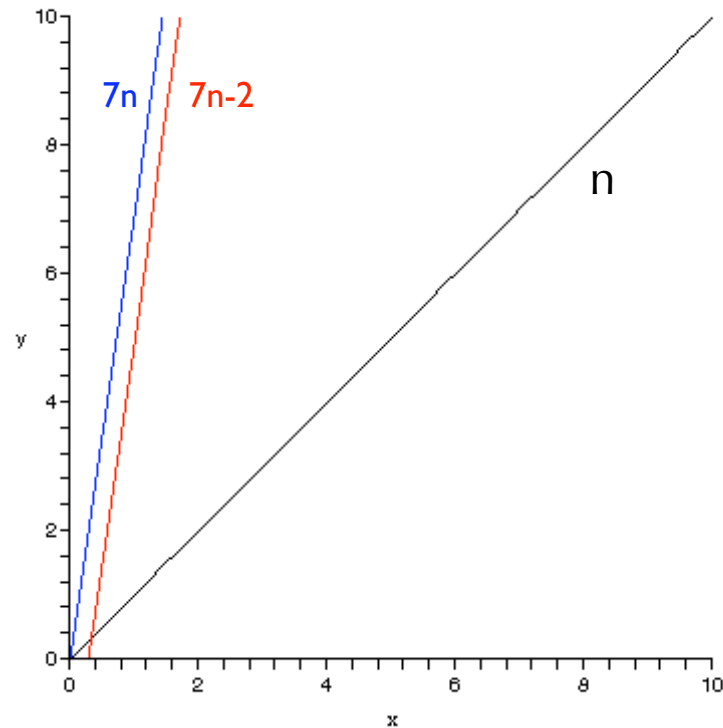
$$n=10 \\ 10n = n^2 = 100$$

$$n=11 \\ 10n = 110 \\ n^2 = 121$$

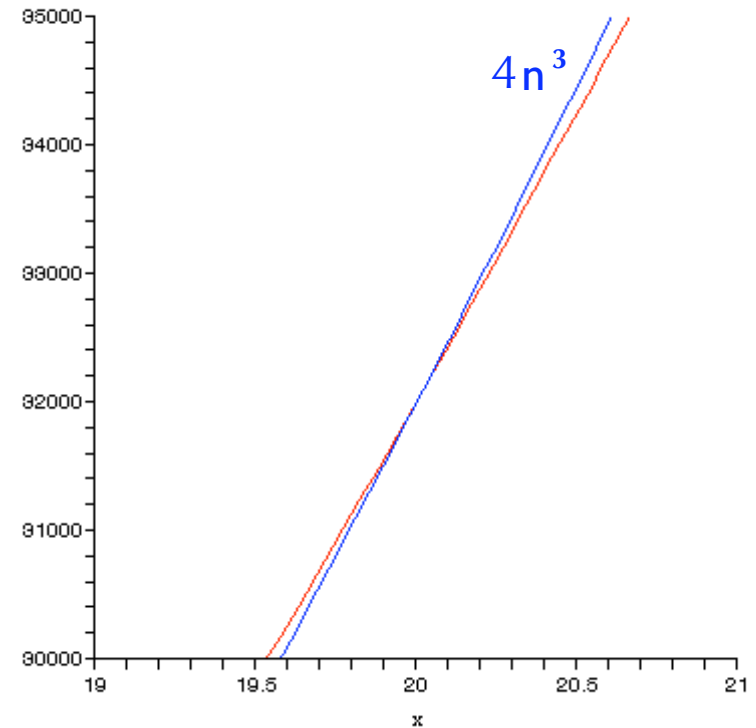
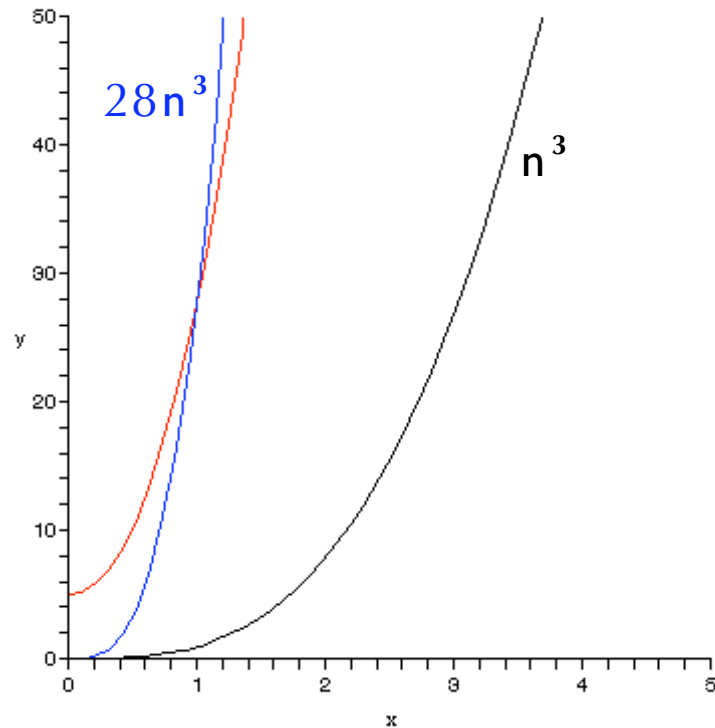
$$n=100 \\ 100n = n^2 = 1000$$

$$n=101 \\ 100n = 10100 \\ n^2 = 10201$$

# Exemple 3 : $7n - 2$ est $O(n)$



# Exemple 4 : $3n^3 + 20n^2 + 5$ est $O(n^3)$



# Grand $O$ et taux de croissance

- La notation grand  $O$  donne une borne supérieure du taux de croissance d'une fonction.
- La phrase “ $f(n)$  est  $O(g(n))$ ” signifie donc que le taux de croissance de  $f(n)$  est plus petit ou égal au taux de croissance de  $g(n)$ .
- On peut utiliser la notation  $O$  pour ordonner les fonctions à partir de leur taux de croissance.

$$1 \leq \log n \leq n \leq n \log n \leq n^2 \leq 2^n \leq n^n$$

# Règles d'utilisation

- Si  $f(n)$  est un polynôme de degré  $d$ , alors  $f(n)$  est  $O(n^d)$  i.e.
  - On "oublie" les termes de + petit ordre (exposant)
  - On "oublie" les termes constants
- On utilise toujours la + petite classe de fonctions
  - On dit " $2n$  est  $O(n)$ " et non " $2n$  est  $O(n^2)$ "
- On utilise toujours l'expression de la fonction la + simple d'une classe
  - On dit " $3n+5$  est  $O(n)$ " et non " $3n+5$  est  $O(3n)$ "

# Propriétés

1. Si  $f_1(x)$  est  $O(g_1(x))$  et  $f_2(x)$  est  $O(g_2(x))$  alors  $(f_1+f_2)(x)$  est  $O(\max(g_1(x), g_2(x)))$

→ Si  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont  $O(g(x))$ , alors  $(f_1+f_2)(x)$  est  $O(g(x))$

2. Si  $f_1(x)$  est  $O(g_1(x))$  et  $f_2(x)$  est  $O(g_2(x))$  alors  $(f_1f_2)(x)$  est  $O(g_1(x)g_2(x))$

# Les mathématiques à réviser...

- Sommations

- Par exemple, on a  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

- Techniques de preuve

- Logarithmes et exposants

## Propriétés des logarithmes

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$\log_b(x^a) = a \log_b(x)$$

## Propriétés des exposants

$$a^{(b+c)} = a^b a^c$$

$$a^{bc} = (a^b)^c$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$