

IFT2125: Introduction à l'algorithmique

Preuve d'optimalité de l'algorithme vorace pour les files d'attente

Preuve: Soit n clients ordonnés arbitrairement et servis selon l'ordre $C = 1, 2, 3, \dots, n$. Le temps total prit pour servir les clients selon cet ordre est

$$\begin{aligned} T(C) &= t_1 + (t_1 + t_2) + (t_1 + t_2 + t_3) + \dots + (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \\ &= nt_1 + (n-1)t_2 + \dots + t_n \\ &= \sum_{i=1}^n (n-i+1)t_i \end{aligned}$$

On va faire une preuve par contradiction. Supposons que $T(C)$ soit optimal et supposons que l'ordre C n'est pas un ordre dans lequel les clients sont servis selon un ordre croissant de temps de service alors, dans l'ordre C , $\exists a, b$ tels que $a < b$ et $t_a > t_b$. Si on échange la position des clients a et b on obtient un nouvel ordre $C' = 1, 2, \dots, b, \dots, a, \dots, n$. Pour cet ordre, on a

$$T(C') = (n-a+1)t_b + (n-b+1)t_a + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a, b}}^n (n-i+1)t_i$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} T(C) - T(C') &= (n-a+1)(t_a - t_b) + (n-b+1)(t_b - t_a) \\ &= (b-a)(t_a - t_b) \\ &> 0 \quad (\text{car } a < b \text{ et } t_a > t_b) \end{aligned}$$

et donc $T(C)$ n'était pas optimal. On a donc une contradiction.