

## IFT2125: Introduction à l'algorithmique

### Preuve d'optimalité de l'algorithme vorace pour le problème du sac à dos

---

**Théorème:** Si les objets sont choisis par ordre décroissant de  $\frac{v_i}{w_i}$ , alors l'algorithme vorace du sac à dos trouve une solution optimale.

**Preuve:** Sans perte de généralité, supposons que les objets sont numérotés par ordre décroissant de leur valeur par unité de poids i.e. que

$$\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{v_n}{w_n}$$

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une solution trouvée par l'algorithme vorace. Si tous les  $x_i = 1$  (tous les objets peuvent entrer dans le sac) alors la solution est clairement optimale. Sinon, soit  $j$  le plus petit indice tel que  $x_j < 1$  (ou  $x_j = 1$  et  $x_{j+1} = 0$ ). On a alors que  $x_i = 1, \forall i < j$  et  $x_i = 0, \forall i > j$  et  $\sum_{i=1}^n x_i w_i = W$ . Soit  $V(X) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  la valeur de la solution  $X$ . On doit montrer que cette valeur  $V(X)$  est optimale.

Soit  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  n'importe quel autre solution et soit  $V(Y) = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ , la valeur de cette solution. Comme  $Y$  est une solution, on a que

$$\sum_{i=1}^n y_i w_i \leq W \quad \text{et} \quad 0 \leq y_i \leq 1, \forall i.$$

Maintenant on a que

$$V(X) - V(Y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) v_i = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) w_i \frac{v_i}{w_i}.$$

On doit montrer que  $V(X) - V(Y)$  est toujours  $\geq 0$  ce qui nous garantira l'optimalité de  $V(X)$  et donc de la solution  $X$ .

Soit  $y$  le plus petit indice où  $x_j < 1$  (ou  $x_j = 1$  et  $x_{j+1} = 0$ ):

- Si  $i < j$  alors  $\frac{v_i}{w_i} \geq \frac{v_j}{w_j}$  et  $x_i = 1 \Rightarrow (x_i - y_i) \geq 0$ . Donc, pour ces cas, on a que

$$(x_i - y_i) \frac{v_i}{w_i} \geq (x_i - y_i) \frac{v_j}{w_j}$$

- Si  $i > j$ , alors  $\frac{v_i}{w_i} \leq \frac{v_j}{w_j}$  et  $x_i = 0 \Rightarrow (x_i - y_i) \leq 0$ . Donc, pour ces cas, on a que

$$(x_i - y_i) \frac{v_i}{w_i} \geq (x_i - y_i) \frac{v_j}{w_j}$$

- Si  $i = j$  alors  $\frac{v_i}{w_i} = \frac{v_j}{w_j}$  et

$$(x_i - y_i) \frac{v_i}{w_i} = (x_i - y_i) \frac{v_j}{w_j}$$

On a donc montrer que  $\forall i, (x_i - y_i) \frac{v_i}{w_i} \geq (x_i - y_i) \frac{v_j}{w_j}$ , où  $j$  est le plus petit indice où  $x_j < 1$  (ou  $x_j = 1$  et  $x_{j+1} = 0$ ). On peut donc écrire

$$V(X) - V(Y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) w_i \frac{v_i}{w_i} \geq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) w_i \frac{v_j}{w_j} = \frac{v_j}{w_j} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) w_i$$

Comme  $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) w_i \geq 0$  ( $\sum_{i=1}^n x_i w_i = W$  et  $\sum_{i=1}^n y_i w_i \leq W$ ),  $V(X) - V(Y) \geq 0$  et  $X$  est optimal.