

1- On cherche n_0 tel que $2n^2 > 8n \log(n)$
pour tout $n \geq n_0$.

$$2n^2 = 8n \log(n)$$

$$2n = 8 \log(n)$$

$$n > 4 \log(n)$$

$$\frac{n}{\log n} > 4 \text{ ou } \frac{1}{4} > \frac{\log(n)}{n}$$

$$n_0 = 2$$

inéquations indéfinies pour 0 ou 1
vraies à partir de 2

2- On cherche n_0 tel que $2n^3 > 40n^2$
pour tout $n \geq n_0$

$$2n^3 > 40n^2$$

$$2n > 40$$

$$n > 20 \Rightarrow n_0 = 21$$

3. 2^{10}

$$100 \log n + 3n$$

$$4n$$

$$n \log n$$

$$4n \log n$$

$$n^2 + 10n$$

$$n^3$$

$$2^{\log n}$$

$$2^n$$

($4n$ devient plus grand
que $100 \log n + 3n$ à partir
d'un n_0)

4- Si $d(n)$ est $O(f(n))$ alors il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que $d(n) \leq c f(n) \quad \forall n, n \geq n_0$

(multiplions l'inéquation par a)

$$a d(n) \leq \underbrace{ac}_{\text{constante positive}} f(n)$$

$$\Rightarrow a d(n) \leq c_1 f(n) \quad c_1 > 0$$

$$\Rightarrow a d(n) \text{ est } O(f(n))$$

5- Si $d(n)$ est $O(f(n))$ et $e(n)$ est $O(g(n))$ alors il existe des constantes

$c_1 > 0, c_2 > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que $d(n) \leq c_1 f(n)$ et $e(n) \leq c_2 g(n)$

(multiplions la 1^{re} inéquation par $e(n)$)

$$d(n) e(n) \leq \underbrace{c_1 f(n) e(n)}$$

est certainement $\leq c_1 c_2 f(n) g(n)$

puisque $e(n) \leq c_2 g(n)$

$$\Rightarrow d(n) e(n) \leq \underbrace{c_1 c_2}_{\text{constante positive}} f(n) g(n)$$

$$\Rightarrow d(n) e(n) \leq c_3 f(n) g(n) \quad c_3 > 0$$

$$\Rightarrow d(n) e(n) \text{ est } O(f(n) g(n)).$$

6- Si $d(n)$ est $O(f(n))$ et $e(n)$ est $O(g(n))$
 alors $d(n) - e(n)$ n'est pas nécessairement
 $O(f(n) - g(n))$.

$d(n) - e(n)$ peut s'écrire aussi comme
 $O(f(n)) + -O(g(n))$

Nous voulons démontrer que

$O(f(n)) + -O(g(n))$ n'est pas nécessairement
 $O(f(n)) + O(-g(n))$ puisque $O(f(n) - g(n))$
 je peux l'écrire
 $O(f(n)) + O(-g(n))$
 ceci revient à prouver
 que $-O(g(n)) \neq O(-g(n))$
 nécessairement

Puisque $e(n)$ est $O(g(n))$ alors je veux
 prouver que

$-e(n) \leq c g(n)$ (définition utilisée
 avec $-O(g(n))$)
 n'est pas nécessairement

$e(n) \leq -c g(n)$ (définition utilisé
 avec $O(-g(n))$)

$-e(n) \leq c g(n)$ ~~\Leftrightarrow~~ $e(n) \leq -c g(n)$

puisque
 $-1 * -e(n) \neq c g(n) * -1$

$e(n) \geq -c g(n)$ ~~\Leftrightarrow~~ $e(n) \leq -c g(n)$

ouy !!
 😊

7- Montrer que $(n+1)^3$ est $O(n^3)$

rapidement avec les propriétés

$$(n+1)^3 = \underbrace{n^3}_{\text{constante}} + \underbrace{3n^2}_{\text{Valeur plus petit que 3}} + \underbrace{3n}_{\text{constante}} + \underbrace{1}_{\text{constante}} \text{ est } O(n^3)$$

provoons-le avec la définition

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \text{ est certainement } \leq 2n^3$$

à partir d'un certain $n_0 > 0$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq 2n^3$$

$$(n+1)^3 \leq \underbrace{c}_{\text{constante}} n^3 \quad c > 0$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 \text{ est } O(n^3)$$

8- Montrer que 2^{n+1} est $O(2^n)$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

$$2^{n+1} \leq 3 \cdot (2^n)$$

$$2^{n+1} \leq c(2^n) \quad c > 0$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \text{ est } O(2^n)$$

9- Montrer que $\sum_{i=1}^n i^2$ est $O(n^3)$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \leq \frac{2n^3 + 3n^3 + n^3}{6} = \frac{6n^3}{6} = n^3$$

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \leq cn^3 \text{ où } c = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n i^2 \text{ est } O(n^3)$$